Mục lục

Chương 1

TỔ HỢP - XÁC SUẤT

Cuối cùng, sau gần 1 tuần làm việc, tôi đã hoàn thiện xong chuyên đề: Tổ hợp - Xác suất - Nhị thức Newton. Chuyên đề là tài liệu tham khảo cho các học sinh thi ĐH, học sinh lớp 11 và giáo viên. Một số ví dụ và bài tập là do tôi tự sáng tạo, còn lại được tôi tổng hợp, sưu tầm từ nhiều nguồn trên mạng internet.
Rất mong nhận được góp ý về tài liệu và cả ủng hộ về vật chất (nếu có thể ☺).

Nam định, những ngày mưa tháng 9 năm 2015.

Phan Văn Phương - Tổ Toán Tin - THPT Xuân Trường B
SĐT: 097.614.6213

1.1 Ba quy tắc cơ bản của bài toán đếm

1.1.1 Mở đầu

- Bạn Nam có 2 hòn bi đen, 3 hòn bi trắng. Cần chọn một hòn bi, màu gì cũng được. Hỏi có mấy cách chọn?
- Bạn Nam cần đi từ Nam Định đến Hà Nội nhưng bắt buộc phải đi qua Phủ Lý. Biết rằng từ Nam Định đến Phủ Lý có 2 cách chọn đường đi, từ Phủ Lý đến Hà Nội có 3 cách chọn đường đi. Hỏi bạn Nam có mấy cách chọn đường đi từ Nam Định đến Hà Nội?

1.1.2 Kiến thức cơ bản

- **Quy tắc cộng:** Giả sử công việc được thực hiện theo một trong hai phương án (trường hợp, khả năng) A hoặc B. Phương án A có thể thực hiện theo n cách, phương án B có thể thực hiện theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n + m$ cách.
- **Quy tắc nhân:** Giả sử một công việc bao gồm hai công đoạn (giai đoạn, bước) A và B. Công đoạn A có thể thực hiện theo n cách, công đoạn B có thể thực hiện theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n.m$ cách.
- **Quy tắc bù trừ:** Tư tưởng của nguyên lí này là *hãy đếm phần dễ đếm để suy ra phần khó đếm nhưng lại phải đếm.*

  Ngoài ra, còn có thể mở rộng *quy tắc cộng, quy tắc nhân* trong trường hợp tổng quát.

1.1.3 Các dạng toán và ví dụ

1. Dùng qui tắc cộng.

Ví dụ 1.1. Trong kì thi THPTQG 2015, trường Xuân Trường B có kết quả xuất sắc nên được chọn một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh đạt từ 28,5 điểm trở lên từ các lớp 12A1,12A2 hoặc 12A3. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, biết rằng lớp 12A1 có 5 học sinh đạt từ 28,5 điểm trở lên, lớp 12A2 có 4 học sinh và lớp 12A3 có 3 học sinh đạt từ 28,5 điểm trở lên.

Hướng dẫn. Nếu chọn học sinh lớp 12A1 thì có 5 cách, lớp 12A2 thì có 4 cách, 12A3 thì có 3 cách. Theo quy tắc cộng có, $5+4+3=12$ cách chọn một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. □

Ví dụ 1.2. Có 8 bông hoa hồng khác nhau và 6 bông hoa cúc khác nhau, hỏi có bao nhiêu cách chọn một bông hoa?

Hướng dẫn. Nếu chọn hoa hồng thì có 8 cách, nếu chọn hoa cúc thì có 6 cách. Vậy có $8+6=14$ cách chọn một bông hoa. □

Ví dụ 1.3. Trên kệ sách có 12 quyển sách tham khảo Toán 11 và 6 quyển sách tham khảo Lý 11. Hỏi một học sinh có bao nhiêu cách chọn một cuốn sách trong hai loại sách nói trên?

Hướng dẫn. Nếu chọn sách Toán thì có 12 cách, chọn sách Lý thì có 6 cách. Vậy có $12+6=18$ cách chọn một cuốn sách tham khảo. □

2. Dùng qui tắc nhân.

Ví dụ 1.4. Một em bé có thể mang họ cha là Nguyễn, hoặc họ mẹ là Lê; tên đệm có thể là Văn, Hữu hoặc Đình; tên có thể là Nhân, Nghĩa, Trí hoặc Dũng. Hỏi có bao nhiêu cách đặt tên cho bé?

Hướng dẫn. Việc đặt tên cho bé phải trải qua ba bước:

- Lựa chọn họ: có 2 cách.
- Lựa chọn tên đệm: có 3 cách.
- Cuối cùng, lựa chọn tên: có 4 cách.

Theo quy tắc nhân, có tất cả $2.3.4=24$ cách đặt tên cho bé. □

Ví dụ 1.5. Một lớp học có 40 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn biết rằng mỗi học sinh đều có thể làm một nhiệm vụ.

Hướng dẫn. Việc chọn ban cán sự lớp gồm 3 bước:

- Chọn một học sinh làm lớp trưởng từ 40 học sinh, có 40 cách.

- Chọn lớp phó từ 39 học sinh còn lại, có 39 cách.
- Chọn thủ quỹ từ 38 học sinh còn lại, có 38 cách.

Theo quy tắc nhân, giáo viên chủ nhiệm có $40.39.38 = 59280$ cách chọn. □

Ví dụ 1.6. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 2 chữ số?

Hướng dẫn. Gọi số cần lập là $\overline{ab}$. Việc tạo thành số này phải trải qua hai bước:

- Chọn a từ một trong các số $1, 2, 3, 4$: Có 4 cách.
- Chọn b từ một trong các số $1, 2, 3, 4$: Có 4 cách.

Theo quy tắc nhân, có tất cả $4.4 = 16$ số. □

Ví dụ 1.7. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4$ có thể lập được bao nhiêu số gồm hai chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau[1]?

Hướng dẫn. Gọi số cần lập là $\overline{ab}, a \neq b$. Việc tạo thành số này phải trải qua hai bước:

- Chọn a từ một trong các số $1, 2, 3, 4$: Có 4 cách. Sau bước này còn ba chữ số chưa được chọn.
- Chọn b từ một trong các số còn lại: Có 3 cách.

Theo quy tắc nhân, có tất cả $4.3 = 12$ số. □

Ví dụ 1.8. Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Từ các phần tử của E có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

Hướng dẫn. Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ với $a_i \in E, a_i \neq a_j, a_4$ chẵn. Việc tạo thành các số này phải trải qua bốn bước:

- Vì số cần lập chẵn nên ta chọn a_4 từ một trong cách số $2, 4, 6, 8$: Có 4 cách. Sau bước này còn lại 8 chữ số chưa được chọn.
- Chọn a_1 từ 8 chữ số còn lại: Có 8 cách.
- Chọn a_2 từ 7 chữ số còn lại: Có 7 cách.
- Chọn a_3 từ 6 chữ số còn lại: Có 6 cách.

Theo quy tắc nhân, có tất cả $4.8.7.6 = 1344$ số. □

Ví dụ 1.9. Cần sắp xếp ba người A, B, C lên hai toa tàu (mỗi toa có thể chứa được 3 người). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

[1] Chú ý, để cho gọn, từ đây nếu nói các chữ số *khác nhau* ta hiểu là *đôi một khác nhau*.

Hướng dẫn. **Lời giải sai:** Toa tàu thứ nhất có 3 cách chọn người, toa thứ hai có 3 cách chọn người. Do đó có $3.3 = 9$ cách. Sai ở chỗ là toa thứ nhất có nhiều cách chọn (không chọn ai cả hoặc chọn 1 người, 2 người, cả 3 người) đồng thời khi chọn người A thì toa thứ hai không thể chọn người A được nữa!

Lời giải đúng: Việc xếp ba người lên tàu gồm 3 bước: Chọn toa cho người A, có 2 cách; sau đó chọn toa cho người B, cũng có 2 cách; và bước cuối cùng, chọn toa cho người C, có 2 cách. Vậy có $2.2.2 = 8$ cách sắp xếp ba người lên hai toa tàu. □

Ví dụ 1.10. Trong vòng đấu loại của giải cờ vua "Master Chess 2016", trường Xuân Trường B có 36 ứng viên tham gia. Mỗi người bốc thăm và chơi đúng 1 ván với một người khác. Mr Ban Ban cần biết có bao nhiêu trận đấu để xếp lịch, hãy tính giúp ông ấy!

Hướng dẫn. Xét 18 đấu thủ (cầm quân trắng chẳng hạn). Người thứ 1 có 35 cách chọn đối thủ, còn lại 34 người chưa thi đấu. Người thứ 2 có 33 cách chọn đối thủ, còn lại 32 người chưa thi đấu. Người thứ 3 có 30 cách chọn đối thủ, còn lại 28 người chưa thi đấu.... Người thứ 18 có 1 cách chọn đối thủ duy nhất còn lại. Theo quy tắc nhân có 35.33.31.29....3.1 trận đấu. □

Ví dụ 1.11. Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau?

Hướng dẫn. Ta xét hai trường hợp:

- **TH1:** Chữ số tận cùng là 0. Khi đó, chữ số thỏa mãn yêu cầu được thành lập qua các bước:
  - ✓ Chọn chữ số hàng nghìn: có 9 cách chọn.
  - ✓ Chọn chữ số hàng trăm: có 8 cách chọn.
  - ✓ Chọn chữ số hàng chục: có 7 cách chọn.

  Theo *quy tắc nhân,* trường hợp này có $9.8.7 = 504$ số thỏa mãn yêu cầu.

- **TH2:** Chữ số tận cùng khác 0. Khi đó, chữ số thỏa mãn yêu cầu được thành lập qua các bước:
  - ✓ Chọn chữ số hàng đơn vị: có 4 cách chọn một trong các số 2,4,6,8.
  - ✓ Chọn chữ số hàng nghìn: có 8 cách chọn, vì phải khác 0 và khác chữ số hàng đơn vị vừa được chọn.
  - ✓ Chọn chữ số hàng trăm: có 8 cách chọn.
  - ✓ Chọn chữ số hàng chục: có 7 cách chọn.

  Theo *quy tắc nhân,* trường hợp này có $4.8.8.7 = 1792$ số thỏa mãn yêu cầu.

Như vậy, tổng hợp cả hai trường hợp ta có $504 + 1792 = 2296$ số thỏa mãn yêu cầu. □

Ví dụ 1.12. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 10 em không giỏi toán cũng không giỏi văn. Hỏi có bao nhiêu học sinh giỏi *ít nhất* một trong 2 môn toán hoặc văn.

Hướng dẫn. Số học sinh giỏi ít nhất một trong 2 môn toán hoặc văn là: $40 - 10 = 30$. □

1.1.4 Bài tập

Bài 1.1. Ban Ban muốn mua một chiếc quần jean hoặc quần kaki và một chiếc áo sơ-mi. Quần jean có 2 màu, quần kaki có 3 màu và áo sơ-mi có 3 màu. Hỏi cậu ta có bao nhiêu cách chọn mua một bộ quần áo?

Bài 1.2. Cho tập hợp $E = \{a, b, c\}$. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp con khác rỗng của E.

Bài 1.3. Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ.

1. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một học sinh nam hoặc nữ dự trại hè của trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?
2. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một học sinh nam và một học sinh nữ dự lễ hội của trường bạn. Hỏi có bao nhiêu các chọn?

Bài 1.4. Người ta ghi nhãn các chiếc ghế ngồi trong một rạp hát bằng hai ký tự: ký tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái) và ký tự ở vị trí thứ hai là một số nguyên dương $1, 2, ..., 30$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau trong rạp hát?

Bài 1.5. Biển số xe máy, nếu không kể mã số vùng, gồm có 6 kí tự. Trong đó kí tự ở vị trí thứ nhất là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái), ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ở bốn vị trí kế tiếp là bốn chữ số chọn trong tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hỏi nếu không kể mã số vùng thì có thể làm được bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

Bài 1.6. Ban Ban muốn đi tham quan 5 thành phố. Cậu ta xuất phát từ một thành phố bất kì trong 5 thành phố, sau đó đi đến một trong các nơi còn lại. Và cứ lặp lại như thế cho đến khi đi qua hết tất cả 5 thành phố, mỗi nơi chỉ tham quan một lần. Hỏi cậu ta có thể đi tham quan hết 5 thành phố theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?

Bài 1.7. Quán Tản Đà ba loại món: bò, gà và cua. Trong đó có 5 món bò: nhúng dấm, bóp thấu, lúc lắc, nướng mỡ chài, nướng lá cách; có 3 món gà: xối mỡ, quay Tứ Xuyên, rút xương và 2 món cua: rang muối, rang me. Hỏi nhà văn Vũ Bằng[2] có bao nhiêu cách gọi hai loại món để lai rai?

Bài 1.8. Cho tập hợp $E = \{2, 4, 5, 7\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau từ tập hợp trên?

Bài 1.9. [Đại học An Ninh 1997] Từ các chữ số 0 đến 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau?

Bài 1.10. [Đại học Thái Nguyên 1997] Từ các chữ số $1, 2, 5, 7, 8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau sao cho số tạo thành:

[2]Vũ Bằng (1913-1984) là một nhà văn, nhà báo Việt Nam từng hoạt động tình báo. Ông nổi tiếng với tác phẩm "Thương nhớ Mười Hai" - tác phẩm được viết trong 11 năm, dày 250 trang - là tâm sự của một người con miền Bắc nhớ da diết quê hương ở bên kia "giới tuyến".

1. là một số chẵn 2. không có chữ số 7 3. nhỏ hơn 278.

Bài 1.11. Cho tập $E = \{1, 3, 4, 7, 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số khác nhau đồng thời số đó lớn hơn 400 và nhỏ hơn 2000.

Bài 1.12. [Đại học Y Hà Nội 1997] Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 6 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 600000?

Bài 1.13. Có bao nhiêu số chẵn, lớn hơn 5000 và gồm 4 chữ số khác nhau.

Bài 1.14. [Viện Đại học Mở Hà Nội 2000] Cho 4 chữ số $1; 2; 3; 4$.

1. Từ 4 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau

2. Tính tổng tất cả các số tự nhiên ở câu a.

Bài 1.15. [Đại học Ngoại Thương TP.HCM 2001] Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau mà trong đó các chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

Bài 1.16. Có tất cả bao nhiêu số có thể thành lập với các chữ số $2, 4, 6, 8$ nếu:

1. Số đó nằm từ 200 đến 600.

2. Số đó gồm ba chữ số khác nhau.

3. Số đó gồm ba chữ số không nhất thiết khác nhau.

Bài 1.17. [Đại học Thái Nguyên 2000] Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số có mặt đủ 3 chữ số nói trên

Bài 1.18. Có bao nhiêu số tự nhiên:

1. Có 4 chữ số mà cả 4 chữ số là số lẻ?

2. Có 5 chữ số mà các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

Bài 1.19. Một trường phổ thông có 12 học sinh chuyên Tin và 18 học sinh chuyên Toán. Thành lập một đoàn gồm hai người sao cho có một học sinh chuyên Toán và một học sinh chuyên Tin. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đoàn như trên ?

Bài 1.20. Từ các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau?

2. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5?

Bài 1.21. Có thể lập bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ các chữ số: $0, 2, 3, 6, 9$?

Bài 1.22. Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau ?

Bài 1.23. Từ các số $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

1. Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 5?

2. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 9?

Bài 1.24. Số 12000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

1.2 Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp

1.2.1 Mở đầu

- Các bạn Xuân, Hạ, Thu, Đông đi chụp ảnh kỉ niệm, ông thợ ảnh sắp xếp bốn bạn thành một hàng ngang. Hỏi ông ta có mấy cách sắp xếp?

- Lớp 11A có 40 học sinh. Cô chủ nhiệm muốn chọn ra 5 học sinh để làm ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó lao động, 1 lớp phó học tập, 1 lớp phó văn nghệ và 1 thủ quỹ. Hỏi cô có bao nhiêu cách chọn?

- Vẫn lớp 11A đó, cô giáo muốn chọn ra 5 học sinh để đi dự lễ kỉ niệm ngày Quốc khánh. Hỏi cô có bao nhiêu cách?

1.2.2 Kiến thức cơ bản

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$), chúng ta có các khái niệm sau:

- **Hoán vị.** Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó. Gọi P_n là số các hoán vị của tập gồm n phần tử thì ta có

$$P_n = n(n-1)(n-2)....3.2.1 := n!$$

- **Chỉnh hợp.** Mỗi bộ gồm k phần tử ($0 \leq k \leq n$) *sắp thứ tự* của tập hợp A được gọi là chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho. Gọi A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử, thì ta có

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Tổ hợp.** Mỗi tập con gồm k phần tử của tập hợp A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho. Gọi C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử, thì ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

- **Tính chất quan trọng**

  ✓ $n! = n.(n-1)!$ ✓ $C_n^k = C_n^{n-k}$ ✓ $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

1.2.3 Các dạng toán và ví dụ

Dạng 1. Bài toán đếm

- Hoán vị và chỉnh hợp có phân biệt *thứ tự, vị trí, chức năng, vai trò, nhiệm vụ...* giữa các phần tử được chọn ra; còn tổ hợp thì không!
- Để chọn ra các tổ hợp chập k của n phần tử có thể hiểu là gồm hai bước:
  - ✓ **Bước 1.** Chọn ra k phần tử của n phần tử, nên có C_n^k cách.
  - ✓ **Bước 2.** Ứng với mỗi k phần tử được chọn, ta đem sắp xếp cả k phần tử này vào các thứ tự (nhiệm vụ...) khác nhau nên bước này có $k!$ cách.

Như vậy, theo quy tắc nhân có $k!C_n^k$ cách, nghĩa là $A_n^k = k!C_n^k$ hay $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$

Để giải quyết các bài toán đếm, ta có hai cách làm: *đếm trực triếp* và *đếm gián tiếp!* Chúng ta sẽ lần lượt xét hai cách đó qua các ví dụ sau. Đầu tiên là *cách đếm trực tiếp:*

Ví dụ 1.1. Từ 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Hướng dẫn. Mỗi cách sắp xếp bộ 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ cho ta một số tự nhiên. Nói cách khác, mỗi một số tự nhiên cần lập tương ứng với một hoán vị của 5 phần tử. Do đó, có $5! = 120$ số. □

Ví dụ 1.2. Trong mặt phẳng cho 5 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng, bao nhiêu véctơ được tạo thành từ 5 điểm đó?

Hướng dẫn. Mỗi một đoạn thẳng tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử, nên có $C_5^2 = 10$ đoạn thẳng.
Mỗi một véctơ tương ứng với một chỉnh hợp chập hai của 5 phần tử, nên có $A_5^2 = 20$ véctơ. □

Ví dụ 1.3. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

Hướng dẫn. Giả sử số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó $a_1 \neq 0$ và $a_i \neq a_j$. Để tạo thành số thỏa mãn yêu cầu ta phải trải qua hai bước:

- Chọn $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn, sau bước này còn lại 4 số chưa được chọn.
- Sắp xếp bốn chữ số còn lại vào bốn vị trí còn lại, có $4! = 24$ cách.

Như vậy, theo qui tắc nhân, ta có $4.24 = 96$ số thỏa mãn yêu cầu. □

Ví dụ 1.4. [CĐ KTKT 2006] Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Từ tập E lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

Hướng dẫn. Giả sử số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó $a_i \in E, a_1 \neq 0$ và $a_i \neq a_j, a_5$ chẵn. Để lập được số thỏa mãn yêu cầu ta tiến hành hai bước:

- Chọn a_5 chẵn từ các số $2, 4, 6$: Có 3 cách.
- Còn lại 6 chữ số chưa được chọn. Mỗi cách chọn có phân biệt thứ tự bộ 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 từ 6 chữ số còn lại là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Do đó, có $A_6^4 = 360$ cách.

Theo quy tắc nhân, có $3.360 = 1080$ số thỏa mãn yêu cầu. □

Ví dụ 1.5. [CĐ2007] Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 3?

Hướng dẫn. Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_i \neq a_j, a_1 \neq 0, (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$ chia hết cho 3. Có 6 chữ số tất cả, mà lập số có 5 chữ số khác nhau nên số cần lập được tạo thành từ các chữ số: $0, 1, 2, 3, 4$ hoặc $0, 1, 2, 3, 5$ hoặc $0, 1, 2, 4, 5$ hoặc $0, 1, 3, 4, 5$ hoặc $0, 2, 3, 4, 5$ hoặc $1, 2, 3, 4, 5$. Trong 6 trường hợp này, chỉ có hai trường hợp thỏa mãn yêu cầu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ chia hết cho 3. Do đó ta xét hai trường hợp:

- TH1. Số cần lập được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$. Mỗi số cần lập tương ứng với một hoán vị của 5 phần tử, nên có $5! = 120$ số.
- TH2. Số cần lập được tạo thành từ các chữ số $0, 1, 2, 4, 5$. Ta tiến hành 2 bước:

  ✓ Bước 1. Chọn $a_1 \neq 0$: Có 4 cách chọn.

  ✓ Sắp xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại: Có $4! = 24$ cách.

  Theo qui tắc nhân, TH2 có $4.24 = 96$ số.

Vậy, có tất cả $120 + 96 = 216$ số thỏa mãn yêu cầu. □

Ví dụ 1.6. [CĐ SPTW 2007] Một tổ học sinh 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra nhóm 5 người để làm trực nhật mà nhóm đó có không quá một nữ?

Hướng dẫn. Vì nhóm đó có không quá một nữ nên ta xét hai phương án:

- Phương án 1: Nhóm gồm 1 nữ và 4 nam. Việc lập nhóm gồm 2 bước. Chọn 1 nữ từ 4 nữ, có $C_4^1 = 4$ cách. Sau đó, chọn 4 nam từ 6 nam, có $C_6^4 = 15$ cách. Theo quy tắc nhân, phương án 1 có $4.15 = 60$ cách.
- Phương án 1: Nhóm gồm 0 nữ và 5 nam. Chọn 5 học sinh nam từ nhóm 6 học sinh nam, nên có $C_6^5 = 6$ cách.

Theo quy tắc cộng, ta có $60 + 6 = 66$ cách chọn nhóm 5 người thỏa mãn yêu cầu. □

Ví dụ 1.7. [ĐHY 2000] Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác có 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách?

Hướng dẫn. Xét ba trường hợp:

- Có 1 nhà toán học nam, 1 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lý: $C_5^1.C_3^1.C_4^1$
- Có 2 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lý: $C_3^2.C_4^1$
- Có 1 nhà toán học nữ, 2 nhà vật lý: $C_3^1.C_4^2$

Vậy có $C_3^2.C_4^1 + C_5^1.C_3^1.C_4^1 + C_3^1.C_4^2 = 90$ cách. □

Ví dụ 1.8. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, chia hết cho 2 mà chữ số đầu tiên của nó cũng là số chẵn?

Hướng dẫn. Có $4.10^3.5 = 20000$ số. □

Ví dụ 1.9. [B2005]Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam 1 nữ.

Hướng dẫn. Việc phân công đội thanh niên tình nguyện về ba tỉnh gồm các bước:

- Có $C_3^1C_{12}^4$cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.
- Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất có $C_2^1C_8^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai.
- Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và thứ hai có $C_1^1C_4^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Theo quy tắc nhân, có có: $C_3^1C_{12}^4.C_2^1C_8^4.C_1^1C_4^4$=207900 cách phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 1.10. [B2004] Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Hướng dẫn. Mỗi đề kiểm tra phải có số câu dễ là 2 hoặc 3, nên ta có ba phương án:

- Đề có 2 câu dễ, 02 câu trung bình, 01 câu khó, thì có số cách chọn là: $C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 = 23625$
- Đề có 2 câu dễ, 01 câu trung bình, 02 câu khó, thì có số cách chọn là: $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2 = 10500$
- Đề có 3 câu dễ, 01 câu trung bình, 01 câu khó, thì có số cách chọn là: $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 22750$

Theo quy tắc cộng, số đề kiểm tra có thể lập được là: $23625 + 10500 + 22750 = 56875$. □

Ví dụ 1.11. [CĐ2004] Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 3 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn 3 học sinh làm nhiệm vụ trực tuần sao cho trong 3 em đó luôn có cán bộ lớp?

Hướng dẫn. Chọn 3 học sinh, để đảm bảo luôn có cán bộ lớp ta xét 3 trường hợp:

- Có 1 cán bộ lớp: Có $C_3^1.C_{27}^2 = 1053$ cách.
- Có 2 cán bộ lớp: Có $C_3^2.C_{27}^1 = 81$ cách.
- Có 3 cán bộ lớp: Có $C_3^3 = 1$ cách.

Theo quy tắc cộng, ta có $1053 + 81 + 1 = 1135$ cách chọn 3 học sinh thỏa mãn yêu cầu. □

Khi bài toán xuất hiện các cụm từ: *có ít nhất, luôn có...* ta thường dùng *cách đếm gián tiếp!* Sau đây là một số ví dụ:

Ví dụ 1.12. [CĐ2004] Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 3 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn 3 học sinh làm nhiệm vụ trực tuần sao cho trong 3 em đó luôn có cán bộ lớp?

Hướng dẫn. Chúng ta sẽ giải lại bài toán này theo cách đếm gián tiếp.

- Mỗi cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ lớp có 30 học sinh là một tổ hợp chập 3 của 30 phần tử. Do đó có $C_{30}^3 = 4060$ cách.
- Mỗi cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh không có cán bộ lớp là một tổ hợp chập 3 của 27 phần tử còn lại. Do đó có $C_{27}^3 = 2925$ cách.

Suy ra số cách chọn 3 học sinh luôn có cán bộ lớp là $4060 - 2925 = 1135$ cách. □

Để thấy tính hiệu quả của cách làm này ta xét tiếp các ví dụ sau:

Ví dụ 1.13. Một nhóm 15 học sinh có 7 nam và 8 nữ. Chọn ra 5 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách?

Hướng dẫn. Nếu chọn cách tính trực tiếp, ta phải chia thành các trường hợp có 1 nữ, 2 nữ, 3 nữ... 5 nữ! Nhưng nếu chọn cách tính gián tiếp, ta xem có bao nhiêu cách chọn *không có học sinh nữ* nào thì lời giải sẽ đơn giản hơn rất nhiều.
Chọn 5 học sinh từ 15 học sinh, có $C_{15}^5 = 3003$ cách. Chọn 5 học sinh không có nữ thì có $C_7^5 = 21$ cách. Do đó, số cách chọn 5 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ là $3003 - 21 = 2982$ cách. □

Ví dụ 1.14. [CĐ SPHN 2005] Trong một tổ học sinh của lớp 12A có 8 nam và 4 nữ. Thầy giáo muốn chọn ra 3 học sinh để làm trực nhật trong đó có ít nhất một học sinh nam. Hỏi thầy có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn. Có $C_{12}^3 - C_4^3 = 216$ cách. □

Ví dụ 1.15. [D2006] Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Hướng dẫn. Số cách chọn 4 học sinh trong 12 học sinh là $C_{12}^4 = 495$
Số cách chọn 4 em học sinh mà mỗi lớp ít nhất 01 em là:

- Lớp A có 2 học sinh, lớp B và C có 01 học sinh: $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$
- Lớp B có 2 học sinh, lớp A và C có 01 học sinh: $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$
- Lớp C có 2 học sinh, lớp B và A có 01 học sinh: $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$
  Số cách chọn 4 em mà mỗi lớp ít nhất một em là: $120 + 90 + 60 = 270$

Vậy số cách chọn phải tìm là: $495 - 270 = 225$. □

Ví dụ 1.16. [Chuyên Nguyễn Huệ L3 2015] Một hộp đựng 5 viên bi đỏ, 6 viên bi trắng và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn không có đủ ba màu?

Hướng dẫn. Nếu tính trực tiếp thì phải chia rất nhiều trường hợp!
Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ 18 viên bi, có $C_{18}^4 = 3060$ cách. Để chọn đủ ba màu ta xét 3 trường hợp:

- 1 đỏ, 1 trắng và 2 vàng: Có $C_5^1.C_6^1.C_7^2 = 630$ cách.
- 1 đỏ, 2 trắng và 1 vàng: Có $C_5^1.C_6^2.C_7^1 = 525$ cách.
- 2 đỏ, 1 trắng và 1 vàng: Có $C_5^2.C_6^1.C_7^1 = 420$ cách.

Do đó, số cách chọn *không đủ ba màu là*: $3060 - 630 - 525 - 420 = 1485$ cách. □

Sau đây ta xét một ví dụ nữa để thấy được *ứng dụng bài toán đếm trong việc chứng minh đẳng thức tổ hợp!*

Ví dụ 1.17. Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có $C_{n+10}^3 - C_{10}^3 - C_n^3 = C_{10}^1 C_n^2 + C_{10}^2 C_n^1$

Lời giải. Xét hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Ta xem có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm đó?

- Cách 1. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm trong $n + 10$ điểm có C_{10}^3 cách. Mỗi tam giác ứng với việc chọn ra 3 điểm không thẳng hàng trong $n+2$ điểm đã cho. Do đó có $C_{10}^3 - -C_{10}^3 - C_n^3$ tam giác.
- Cách 2. Mỗi tam giác được tạo thành bởi *1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc d_2* hoặc *2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc d_2*. Do đó có $C_{10}^1 C_n^2 + C_{10}^2 C_n^1$ tam giác.

Vì số tam giác đếm theo hai cách phải bằng nhau nên ta có điều phải chứng minh. □

Dạng 2. Chứng minh các đẳng thức tổ hợp

Sử dụng các công thức sau

- $n! = n.(n-1)!$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Ví dụ 1.18. Tính giá trị các biểu thức sau

1. $A = \dfrac{3!.7!}{4!.6!}$
2. $B = \dfrac{(m+1)!}{m!} - \dfrac{(m+2)!}{(m+1)!}$
3. $C = \dfrac{6!}{3!.2!}\left(P_4 + P_3P_5 - P_2P_6\right)$

Ví dụ 1.19. Chứng minh rằng

1. $P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$
2. $\frac{1}{A_n^2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
3. $\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}$
4. $P_n = (n-1)\left(P_{n-1} + P_{n-2}\right)$
5. $k.C_n^k = n.C_{n-1}^{k-1}$
6. $A_n^k = k!.C_n^k$
7. $C_{n+1}^p = \frac{n+1}{p}C_n^{p-1}$
8. $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2.A_{n+k}^n$
9. $\frac{A_{n+4}^n}{P_{n+2}} - \frac{107}{4!.P_n} = \frac{n^2+7n-95}{4!.n!}$

Ví dụ 1.20. Chứng minh rằng

1. $P_kA_{n+1}^2A_{n+3}^2A_{n+5}^2 = n.k!A_{n+5}^5$
2. $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2},\ (2 < k < n)$
3. $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k,\ (3 \le k \le n)$
4. $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k,\ (4 \le k \le n)$
5. $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + ... + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n},\ n \ge 1$

Ví dụ 1.21. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \ge 1$, ta có

$$C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\frac{c_n^3}{C_n^2} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = C_{n-1}^2$$

Hướng dẫn. Với $k = \overline{1,n}$ ta có

$$k\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = ... = n - k + 1$$

Do đó

$$C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\frac{c_n^3}{C_n^2} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = C_n^2$$

Vậy $C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\frac{c_n^3}{C_n^2} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = C_{n-1}^2$. □

Dạng 3. Phương trình, bất phương trình tổ hợp

Chú ý đến điều kiện của C_n^k, A_n^k là $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$.

Ví dụ 1.22. Giải các phương trình

1. (CĐSP TP HCM 99) $C_{14}^{x}+C_{14}^{x+2}=2C_{14}^{x+1}$
2. $4.C_n^3=5.C_{n+1}^2$
3. (ĐHNN HN 99) $C_n^1+6C_n^2+C_n^3=9n^2-14n$
4. $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3-C_n^{n-4}}=\frac{24}{23}$
5. $C_x^1+C_x^2+C_x^3=\frac{7}{2}x$
6. $A_x^2.C_x^{x-1}=48$

Hướng dẫn. 3. $x=37$, 5. $x=4$, 6. $x=4$. □

Ví dụ 1.23. [CĐ GTVT 2007] Giải phương trình $P_xC_x^2+36=6(P_x+C_x^2)$

Hướng dẫn. Điều kiện: $x\geq 2, x\in\mathbb{N}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&x!\frac{x(x-1)}{2}+36=6(x!+\frac{x(x-1)}{2})\\&\Leftrightarrow (x!-6)(x^2-x-12)=0\\&\Leftrightarrow x=3,x=4.\end{aligned}$$

So sánh điều kiện được nghiệm của phương trình đã cho là $x=3,x=4$. □

Ví dụ 1.24. [D2005] Giải phương trình $C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149$

Hướng dẫn. Biến đổi thành $n^2+4n-45=0$. Đáp số $n=5$. □

Ví dụ 1.25. [B2006] Cho tập A gồm n phần tử, $n\geq 4$. Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm n? Tìm $k\in\{1,2,...,n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất?

Hướng dẫn. Số tập con 4 phần tử của A là C_n^4, số tập con 2 phần tử của A là C_n^2. Theo đề bài ta có phương trình

$$C_n^4=20C_n^2\Leftrightarrow n^2-5n-234=0\Leftrightarrow n=18$$

Vậy tập A có 18 phần tử.
Số tập con gồm k phần tử của A là C_{18}^k. Xét bất phương trình

$$C_{18}^k<C_{18}^{k+1}\Leftrightarrow k<\frac{17}{2}\Leftrightarrow k=1,2,...8.$$

Suy ra $C_{18}^k>C_{18}^{k+1}$ khi $k=9,10,...18$. Nghĩa là ta có

$$C_{18}^1<C_{18}^2<...<C_{18}^8<C_{18}^9>C_{18}^{10}>C_{18}^{11}>...>C_{18}^{18}$$

Vậy số tập con gồm 9 phần tử của A là số tập con lớn nhất. □

Ví dụ 1.26. [BKHN-2000] Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{2}A_{2x}^2-A_x^2\leq\frac{6}{x}C_x^3+10 \qquad (1.1)$$

Hướng dẫn. Điều kiện $x \in \mathbb{N}$ và $x \geq 3$. Bất phương trình (1.1) tương đương với

$$\begin{aligned} &\frac{(2x-1)\,2x}{2} - (x-1)\,x \leq \frac{6\,(x-2)\,(x-1)}{3!x} + 10 \\ &\Leftrightarrow 2x\,(2x-1) - x\,(x-2) \leq (x-2)\,(x-1) + 10 \\ &\Leftrightarrow x \leq 4 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, tìm được $x = 3$ và $x = 4$. □

Ví dụ 1.27. [ĐH SP Tiền Giang 2006] Giải bất phương trình $A_x^2 + C_{x+1}^2 \leq 20$

Hướng dẫn. Điều kiện $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$. Với điều kiện đó, bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} &x(x-1) + \frac{(x+1)x}{2} \leq 20 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - x - 40 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{481}}{6} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{481}}{6} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện được đáp số $x = 2, x = 3$. □

Ví dụ 1.28. Giải các bất phương trình

1. $\frac{A_{x+4}^4}{(x+2)!} < \frac{15}{(x-1)!}$
2. (ĐHHH 99) $\frac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \frac{1}{14P_3}$
3. (TN04-05) $C_{n+3}^n > \frac{5}{2}A_n^2$

Hướng dẫn. 5. $n \geq 6$, 6. Biến đổi thành $n(n^2-9n+26)+6 > 0$ luôn đúng với mọi $n \geq 2$. □

Ví dụ 1.29. [TN2003-2004] Giải bất phương trình $\frac{P_{n+5}}{(n-k)!} \leq 60A_{n+3}^{k+2}$

Hướng dẫn. Điều kiện $n \geq k \geq -2; n, k \in \mathbb{Z}$. Biến đổi bất phương trình thành

$$(n+5)(n+4)(n-k+1) \leq 60$$

- Với $n \geq 4$ bất phương trình vô nghiệm.
- Với $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ tìm được các nghiệm (n, k) của bất phương trình là $(0,0), (1,0), (1,1), (2,2), (3,3)$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0,0), (1,0), (1,1), (2,2), (3,3)$. □

Ví dụ 1.30. Giải các hệ phương trình

1. $\begin{cases} 3C_x^y = C_{x+2}^y \\ 24C_x^y = A_x^y \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5C_{x+1}^y = 6C_x^{y+1} \\ C_{x+1}^y = 3C_x^{y-1} \end{cases}$
3. (BK2001) $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$

Hướng dẫn. 2. $x = 8, y = 3$ 3. $x = 5, y = 2$. □

1.2.4 Bài tập

Bài 1.25. [B2008] Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{1}{C_n^k}$$

Bài 1.26. [ĐHQGHN-1999-D] Chứng minh rằng $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

Bài 1.27. Chứng minh rằng

1. $C_n^k.C_{n-k}^{p-k} = C_n^p.C_p^k$
2. $C_n^r = \frac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$
3. $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$
4. $\frac{P_{n+2}}{A_n^k P_{n-k}} = (n+1)(n+2)$
5. $C_n^k = \frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$
6. $\frac{n!}{(n-3)!A_n^2} - \frac{P_{n+1}}{(n+2)!} = \frac{n^2-5}{n+2}$

Bài 1.28. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = \dfrac{n!}{(n-3)A_n^2} - \dfrac{P_{n+1}}{(n+2)!}$
2. $B = \dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$
3. $C = \dfrac{P_{n+2}}{A_n^k.P_{n-k}} + \dfrac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$
4. $D = C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + ... + k\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} + ... + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$

Bài 1.29. [ĐHQGHN-2000-A] Chứng minh rằng $C_{2001}^k + C_{2001}^{k+1} \le C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001}$ với $0 \le k \le 2000$.

Bài 1.30. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}<2$$

Bài 1.31. Giải phương trình, bất phương trình:

1. $\dfrac{x!-(x-1)!}{(x+1)!} = \dfrac{1}{6}$
2. $\dfrac{1}{n-2}\left(\dfrac{5}{n+1}.\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!4!} - \dfrac{n.(n-1)!}{12(n-3).(n-4)!2!}\right) \le 5$

Bài 1.32. Giải phương trình

1. $A_n^3 = 20n$
2. (CĐ2007) $A_x^3 + 5A_x^2 = 2(x+15)$
3. $3A_n^2 - A_{2n}^2 + 42 = 0$
4. $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$
5. $\dfrac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \dfrac{24}{23}$
6. $\dfrac{1}{C_4^x} - \dfrac{1}{C_5^x} = \dfrac{1}{C_6^x}$
7. $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}$
8. $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$
9. $C_{8+x}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$
10. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$

Bài 1.33. Giải các bất phương trình

1. $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$
2. $\dfrac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \dfrac{143}{4P_{n-1}} < 0$
3. $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \dfrac{1}{14P_3}$
4. $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0$

Bài 1.34. [ĐHQG HCM-B-1998] Giải phương trình $A_x^3 + 5.A_x^2 \leq 21x$

Bài 1.35. Giải các hệ phương trình

1. $\begin{cases} 3C_y^x = C_{y+2}^x \\ 24C_y^x = A_y^x \end{cases}$
2. $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$
3. $\dfrac{C_{x+1}^y}{6} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5} = \dfrac{C_x^{y-1}}{2}$

Bài 1.36. [CĐ KTKT TB 2007] Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : C_{x-1}^y = 21 : 60 : 10$

Bài 1.37. [ĐH HH TPHCM-1999] Có bao nhiêu cách sắp xếp năm học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế dài sao cho:

1. Bạn C ngồi chính giữa;
2. Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế

Bài 1.38.

1. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người thành một hàng dọc.
2. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người ngồi quanh một bàn chữ $\cup$.
3. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người ngồi quanh một bàn tròn.

Bài 1.39. Một lớp học có 40 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn:

1. Một ban cán sự lớp gồm một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ.
2. Một đội văn nghệ gồm ba thành viên.

Bài 1.40. Từ 6 chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau? Trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5?

Bài 1.41. [ĐH Y HN-1999] Có bao nhiêu số chẵn có năm chữ số khác nhau lấy từ các số $0, 2, 3, 6, 9$.

Bài 1.42. Với 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số phân biệt?

Bài 1.43. [ĐH KT HN-1998] Một đội xây dựng có 10 công nhân và 3 kĩ sư. Để lập một tổ công tác cần chọn một kĩ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập tổ công tác.

Bài 1.44. [HVQH QT-2000] Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày, cần 3 người làm nhiệm vụ ở điểm A, 2 người ở địa điểm B, còn 4 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công?

Bài 1.45. [ĐHSP Vinh-1999] Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó có 8 em chỉ biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp và 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp và 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm từ tổ sinh viên đó.

Bài 1.46. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 5 chữ số khác nhau?

Bài 1.47. Từ các chữ số $0, 1, 3, 5, 7$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

Bài 1.48. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

Bài 1.49. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau trong đó bắt buộc có mặt chữ số 0.

Bài 1.50. Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ tập E sao cho:

1. Luôn có mặt hai chữ số 2, 3.
2. Luôn có mặt hai chữ số 2, 3 và hai chữ số này luôn đứng kề nhau.
3. Luôn có mặt hai chữ số 2, 3 và hai chữ số này không đứng kề nhau.

Bài 1.51. Bạn Nam có 11 bạn thân là nữ. Nhân dịp sinh nhật bạn Nam muốn mời 5 trong số 11 người đó đến giúp. Nhưng trong số 11 người đó, có 2 người cùng yêu bạn Nam nên không muốn gặp mặt nhau. Hỏi bạn Nam có bao nhiêu cách mời để 2 người đó không phải chạm trán nhau?

Bài 1.52. [Sư Phạm 2 - 1999]: Một trường tiểu học có 50 cháu ngoan Bác Hồ, trong đó có 4 cặp sinh đôi. Cần chọn ra 3 người đi dự đại hội cháu ngoan Bác Hồ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 3 người đó không có cặp sinh đôi nào.

Bài 1.53. Tìm số tự nhiên k sao cho $C_{14}^{k}, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$ lập thành một cấp số cộng.

Bài 1.54. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$). Cứ ba điểm điểm không thẳng hàng trong số các điểm nói trên lập thành một tam giác. Biết rằng có 2800 tam giác được lập theo cách như vậy. Tìm n?

Bài 1.55. Một đa giác lồi n cạnh có số đường chéo là 35. Tìm n?

Bài 1.56. [B2002] Cho đa giác đều $A_1, A_2, ...A_{2n}$ ($n \geq 2, n$ là số nguyên) nội tiếp đường tròn tâm O. Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ...A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ...A_{2n}$. Hãy tìm n?

Bài 1.57. [THTT-5-2010] Đội dự tuyển bóng bàn có 10 nữ và 7 nam, trong đó có danh thủ nam là Vũ Mạnh Cường và danh thủ nữ là Ngô Thu Thủy. Người ta cần lập một đội tuyển bóng bàn Quốc gia từ đội dự tuyển nói trên. Đội tuyển Quốc gia bao gồm 3 nữ và 4 nam. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội tuyển Quốc gia sao cho trong đội tuyển có mặt chỉ một trong hai danh thủ nói trên.

Bài 1.58. [ĐH-QGHN-2000-B] Từ 5 chữ số $0, 1, 3, 5, 7$ có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

Bài 1.59. [ĐHSP Vinh-A-1999] Cho 8 chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số, đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

Bài 1.60. [ĐH Huế-1999] Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhieu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả ba màu.

Bài 1.61. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau đôi một trong đó phải có mặt chữ số 0?

Bài 1.62. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3.

Bài 1.63. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và 3.

Bài 1.64. Lập số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt từ các chữ số 1,2,3,4,5,6. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số có mặt chữ số 6?

Bài 1.65. Với các chữ số của tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; viết được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, trong đó có hai chữ số 1, ba chữ số còn lại khác nhau từng đôi và khác 1.

Bài 1.66. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số đều có mặt các chữ số 8 và 9?

Bài 1.67. Cho tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một từ X, sao cho một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1.

Bài 1.68. Một chi đoàn có 15 đoàn viên trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội để trong 4 người được chọn có ít nhất 1 nữ.

Bài 1.69. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam.

Bài 1.70. Trong một chiếc hộp có 6 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Có bao nhiêu cách chọn để trong 4 bi lấy ra không có đủ cả ba màu?

Bài 1.71. Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp. Có bao nhiêu cách chọn 5 viên có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

Bài 1.72. Trong một buổi tiệc mỗi ông bắt tay với các người khác trừ vợ mình, các bà không người nào bắt tay nhau. Biết có tất cả 15 cặp vợ chồng tham dự tiệc, hỏi có tất cả bao nhiêu cái bắt tay của 30 người này?

Bài 1.73. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số khác nhau? Biết $n \in \mathbb{N}$ và $1 < n \leq 5$.

Bài 1.74. Có bao nhiêu cách xếp 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế được sắp thành một hàng ngang sao cho không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau.

Bài 1.75. Trong mặt phẳng cho n đường thẳng đôi một cắt nhau sao cho không có ba đường nào đồng quy. Khi đó n đường thẳng đó chia mặt phẳng thành những miền không có điểm chung trong, trong đó có những miền là đa giác. Tính theo n số các đa giác đó?

1.3 Xác suất

1.3.1 Kiến thức cơ bản

1. Phép thử ngẫu nhiên

- Phép thử ngẫu nhiên là một thí nghiệm hay một hành động mà :
  - ✓ Kết quả của nó không dự đoán trước được;
  - ✓ Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.
- Tập tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử gọi là không gian mẫu của phép thử, ký hiệu Ω.

2. Biến cố

- Một biến cố A liên quan tới phép thử T được mô tả bởi một tập con Ω_A của không gian mẫu. Biến cố A xảy ra khi kết quả của T thuộc Ω_A. Mỗi phần tử của Ω_A gọi là một kết quả thuận lợi cho A.
- Biến cố chắc chắn: Là không gian mẫu Ω. Biến cố không thể: Là biến cố rỗng $\varnothing$. Chẳng hạn, từ một nhóm có 6 nam và 4 nữ, chọn ra 5 người. Khi đó, biến cố "chọn được 5 người nữ" là không thể, biến cố "chọn được ít nhất 1 nam" là biến cố chắc chắn.
- **Biến cố hợp:** Là biến cố "A hoặc B xảy ra", ký hiệu là $A \cup B$. Ta có $\Omega_{A\cup B} = \Omega_A \cup \Omega_B$.
- **Biến cố giao:** Là biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", ký hiệu là $A \cap B$ hoặc AB. Ta có $\Omega_{A\cap B} = \Omega_A \cap \Omega_B$.
- **Biến cố đối** của biến cố A: Là biến cố "Không xảy ra A", ký hiệu là $\overline{A}$. Ta có $\Omega_{\overline{A}} = \Omega \backslash \Omega_A$.
- **Biến cố xung khắc:** Là hai biến cố A và B mà nếu A xảy ra thì B không xảy ra và ngược lại.
- **Biến cố độc lập:** Hai biến cố được gọi là độc lập nếu việc có xảy ra biến cố này hay không không ảnh hưởng tới biến cố kia và ngược lại.

3. Xác suất của một biến cố

- Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng.
- Nếu A là một biến cố liên quan đến phép thử T thì xác suất của A là một số, ký hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{\text{số phần tử thuận lợi cho A}}{\text{số phần tử của không gian mẫu}}$$

- Tính chất:
  - ✓ $0 \le P(A) \le 1, P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1, P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
  - ✓ Quy tắc cộng xác suất: Nếu A, B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - ✓ Quy tắc nhân xác suất: Nếu A, B độc lập thì $P(AB) = P(A).P(B)$

1.3.2 Các dạng toán và ví dụ

Dạng 1. Tính xác suất bằng định nghĩa

Có hai cách tính:

- Tính trực tiếp: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{\text{số phần tử thuận lợi cho A}}{\text{số phần tử của không gian mẫu}}$
- Tính gián tiếp thông qua biến cố đối: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Ví dụ 1.31. [A2013] Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn?

Hướng dẫn. Mỗi phần tử của S là một chỉnh hợp chập 3 của 7, do đó số phần tử của S là $A_7^3 = 210$. Giả sử số tự nhiên của tập S có dạng $\overline{abc}$. Để số được chọn là số chẵn thì $c \in \{2, 4, 6\}$ nên c có 3 cách chọn. Do đó, số cách chọn một số chẵn từ S là $3.A_6^2 = 90$.
Vậy xác suất cần tìm là $\frac{90}{210} = \frac{3}{7}$ □

Ví dụ 1.32. [Đại học Thuỷ Lợi 1997] Trong một chiếc hộp kín có 10 quả cầu trắng và 8 quả cầu đỏ. Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu, tính xác suất để trong 5 quả lấy được có đúng 3 quả cầu đỏ?

Hướng dẫn. Đáp số: $\frac{5}{17}$ □

Ví dụ 1.33. [Đại học KTCN TPHCM 1997] Một cái bình đựng 4 quả cầu xanh và 6 quả cầu đỏ. Lấy ngẫu nhiên ra ba quả cầu cùng một lúc, tính xác suất để trong ba quả lấy được có hai quả cùng mầu?

Hướng dẫn. Chia hai trường hợp. Đáp số $0,8$ □

Ví dụ 1.34. [B2013] Có hai chiếc hộp đựng bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu?

Hướng dẫn. Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_7^1.C_6^1 = 42$. Để hai viên bi được lấy ra có cùng màu ta xét hai trường hợp:

- Hai viên lấy ra cùng màu đỏ, có $C_4^1.C_2^1 = 8$ cách.
- Hai viên lấy ra cùng màu trắng, có $C_3^1.C_4^1 = 12$ cách.

Vậy có $8+12 = 20$ cách lấy được hai viên bi cùng màu. Do đó xác suất cần tìm là $\frac{20}{42} = \frac{10}{21}$. □

Ví dụ 1.35. [B2012] Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Hướng dẫn. Số cách gọi 4 học sinh lên bảng là: $C_25^4 = 12650$. Gọi 4 học sinh có cả nam lẫn nữ ta xét ba trường hợp:

- 1 nữ 3 nam có: $10C_15^3 = 10.455 = 4550$ cách.
- 2 nữ 2 nam có: $C_10^2C_15^2 = 4725$ cách.
- 3 nữ 1 nam có: $C_10^3C_15^1 = 1800$ cách.

Suy ra số cách gọi 4 học sinh lên bảng giải bài tập mà có cả nam và nữ là: $4550+4725+1800 = 11075$. Do đó, xác suất cần tính là: $\frac{11075}{12650} = \frac{443}{506}$. □

Ví dụ 1.36. Một lớp học có 30 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 nam và 1 nữ là $\frac{12}{29}$. Tính số học sinh nữ của lớp.

Hướng dẫn. Gọi số học sinh nữ của lớp là n, điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \leq 28$.

- Số cách chọn 3 học sinh bất kì của lớp là C_{30}^3.
- Số cách chọn 3 học sinh gồm 2 nam và 1 nữ là $C_{30-n}^2C_n^1$.
- Theo đề bài có
$$\frac{C_{30-n}^2C_n^1}{C_{30}^3} = \frac{12}{29} \Leftrightarrow n = 14, n = \frac{45 \pm \sqrt{1065}}{2}$$

Kết hợp điều kiện được đáp số là $n = 14$. □

Ví dụ 1.37. [BGD 2015] Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong số đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, tính xác suất để 3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn là giống nhau.

Hướng dẫn. Không gian mẫu Ω là tập hợp gồm tất cả các cặp hai bộ 3 câu hỏi, mà ở vị trí thứ nhất của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh A chọn và ở vị trí thứ hai của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh B chọn. Vì A cũng như B đều có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ 10 câu hỏi thi nên theo quy tắc nhân, ta có $n(\Omega) = C_{10}^3.C_{10}^3$.
Kí hiệu X là biến cố "bộ 3 câu hỏi A chọn và bộ 3 câu hỏi B chọn là giống nhau". Vì với mỗi cách chọn 3 câu hỏi của A, B chỉ có duy nhất cách chọn 3 câu hỏi giống như A nên $n(\Omega_X = C_{10}^3.1) = C_{10}^3$. Do đó, xác suất cần tính là $P(X) = \frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$. □

Ví dụ 1.38. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số trong các số được lập, tính xác suất để trong số được lấy gồm có hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

Hướng dẫn. Không gian mẫu có $A_6^4 = 360$ phần tử. Lấy được số thỏa mãn yêu cầu gồm ba bước:

- Lấy ra hai chữ số chẵn từ 3 chữ số chẵn, có $C_3^2 = 3$ cách.
- Lấy ra hai chữ số lẻ từ 3 chữ số lẻ, có $C_3^2 = 3$ cách.
- Hoán vị 4 chữ số này để được số thỏa mãn yêu cầu, có 4! cách.

Vậy có tất cả $3.3.4! = 216$ số có bốn chữ số gồm có hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ. Do đó xác suất cần tìm là $P = \frac{216}{360} = 0,6$. □

Chúng ta xét một số ví dụ sử dụng phương pháp tính xác suất thông qua *biến cố đối!*

Ví dụ 1.39. Có 7 sách Toán, 5 sách Lý và 6 sách Hóa. Chọn ngẫu nhiên 6 sách. Tính xác suất để số sách được chọn có không quá 5 sách Toán.

Hướng dẫn. Có tất cả $7 + 5 + 6 = 18$ cuốn sách. Phép thử là "chọn 6 cuốn sách trong 18 cuốn sách" không phân biệt thứ tự nên không gian mẫu có $C_{18}^6 = 18564$ phần tử.
Rõ ràng nếu tính trực tiếp, để "có không quá 5 sách Toán" ta phải xét các trường hợp có 0,1,2,3,4,5 sách Toán! Nên ta sẽ sử dụng biến cố đối.
Gọi A là biến cố: "Số sách được chọn có không quá 5 sách Toán" thì $\overline{A}$ là biến cố: "Cả 6 cuốn sách được chọn đều là sách Toán". Do đó, số phần tử của $\overline{A}$ là $n(\overline{A}) = C_7^6 = 7$. Suy ra xác suất để cả 6 cuốn sách được chọn đều là sách Toán là

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{7}{18564} = \frac{1}{2652}$$

Vậy xác suất để số sách được chọn có không quá 5 sách Toán là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{2651}{2652}$. □

Ví dụ 1.40. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong số bi lấy ra không đủ cả ba màu?

Hướng dẫn. Phép thử là chọn 4 bi bất kỳ trong tổng số 15 bi nên không gian mẫu có $C_{15}^4 = 1365$ phần tử. Gọi A là biến cố "Chọn được 4 bi không đủ cả ba màu" thì $\overline{A}$ là biến cố "Chọn được 4 bi có đủ cả ba màu". Ta có

$$n(\overline{A}) = C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 720 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{720}{1365} = \frac{48}{91}$$

Suy ra xác suất để chọn được 4 bi không đủ cả ba màu là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{43}{91}$. □

Ví dụ 1.41. Một chiếc hộp đựng 6 bút màu xanh, 6 bút màu đen, 5 bút màu tím và 3 bút màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên ra 4 chiếc bút. Tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bút cùng màu.

Hướng dẫn. Phép thử là lấy 4 chiếc bút trong 20 chiếc bút không phân biệt thứ tự nên không gian mẫu có $C_{20}^4 = 4845$ phần tử. Gọi A là biến cố "lấy được ít nhất 2 bút cùng màu" thì $\overline{A}$ là biến cố "lấy được 4 chiếc bút có 4 màu khác nhau". Do đó, số phần tử thuận lợi của biến cố $\overline{A}$ là $C_6^1.C_6^1.C_5^1.C_3^1 = 540$ phần tử. Suy ra xác suất để lấy được "ít nhất hai bút cùng màu" là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{540}{4845} = \frac{287}{323}$. □

Ví dụ 1.42. Sea Games 28 có 10 đội bóng tham gia, trong đó có Việt Nam và Thái Lan. Bốc thăm ngẫu nhiên để chia các đội thành hai bảng: bảng A và bảng B. Tính xác suất để Việt Nam và Thái Lan ở cùng một bảng?

Lời giải. Có C_{10}^5 cách chọn 5 đội vào bảng A, sau đó có C_5^5 cách chọn 5 đội còn lại vào bảng B. Vậy có $C_{10}^5.C_5^5 = 252$ cách chia 10 đội thành hai bảng.
Ta xem có bao nhiêu cách chia bảng mà hai đội Việt Nam và Thái Lan ở cùng một bảng. Xét hai phương án:

- Hai đội cùng bảng A: Như vậy ở bảng A còn thiếu 3 đội nữa, có C_8^3 cách chọn 3 trong 8 đội còn lại để xếp vào bảng A. Còn lại 5 đội, có C_5^5 cách chọn 5 đội này vào bảng B. Theo quy tắc nhân có $C_8^3.C_5^5 = 66$ cách.
- Hai đội cùng bảng B: Lập luận tương tự, có 66 cách.

Theo quy tắc cộng có $66 + 66 = 112$ cách chia bảng mà hai đội Việt Nam và Thái Lan ở cùng một bảng.
Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{112}{252} = \frac{4}{9}$. □

Ví dụ 1.43. Một lớp học có 80 sinh viên trong đó có 40 em học Tiếng Anh, 30 em học Tiếng Pháp và 20 em học cả Tiếng Anh lẫn Tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên 2 em, tính xác suất để hai em được chọn mỗi em chỉ học một thứ tiếng.

Hướng dẫn. Phép thử là chọn ngẫu nhiên hai sinh viên từ 80 sinh viên, suy ra không gian mẫu có $C_{80}^2 = 3160$ phần tử.

Chọn hai em học tiếng Anh, có C_{40}^2 cách. Chọn hai em học tiếng Pháp, có C_3^20 cách. Chọn hai em học cả hai thứ tiếng, có C_{20}^2 cách.
Suy ra số cách chọn "hai em mà mỗi em chỉ học một thứ tiếng" là $C_{40}^2 + C_{30}^2 - C_{20}^2 = 1025$ cách. Do đó, xác suất cần tính là $\frac{1025}{3160} = \frac{205}{363}$. □

Dạng 2. Các qui tắc tính xác suất

Ví dụ 1.44. Có hai cái hộp, hộp thứ nhất đựng 6 bi xanh và 4 bi đỏ; hộp thứ hai đựng 3 bi xanh và 7 bi đỏ. Xét phép thử ngẫu nhiên T: "Lấy từ mỗi hộp 1 viên bi". Tính xác suất lấy được ở mỗi hộp một viên bi đỏ.

Hướng dẫn. Chúng ta sẽ sử dụng cả hai cách để giải bài toán này.

- **Cách 1.** Sử dụng định nghĩa cổ điển của xác suất.
  Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 10.10 = 100$. Gọi X là biến cố: "Lấy được ở mỗi hộp 1 viến bi đỏ", có $|\Omega_X| = 4.7 = 28$
  Vậy xác suất lấy được ở mỗi hộp một viên bi đỏ là $P_X = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{28}{100} = 0,28$
- **Cách 2.** Dùng quy tắc tính xác suất.
  Gọi A là biến cố lấy được bi đỏ ở hộp thứ nhất, có $P_A = \frac{4}{10} = 0,4$. Gọi B là biến cố lấy được bi đỏ ở hộp thứ hai, có $P_B = \frac{7}{10} = 0,7$
  Suy ra xác suất "lấy được ở mỗi hộp 1 bi đỏ" là: $P(A.B) = P_A.P_B = 0,4.0,7 = 0,28$

□

Ví dụ 1.45. Có một chiếc máy bay có 2 động cơ. Biết xác suất bị hỏng của động cơ 1 là 0,1; xác suất hỏng của động cơ 2 là 0,15 và 2 động cơ hoạt động độc lập. Tính xác suất cả hai động cơ đều hỏng?

Hướng dẫn. Gọi A là biến cố "động cơ 1 bị hỏng", B là biến cố "động cơ 2 bị hỏng" thì A và B là hai biến cố độc lập. Khi đó, biến cố "cả hai động cơ đều hỏng" là AB và xác suất cả hai động cơ đều hỏng là $P(AB) = P(A).P(B) = 0,015$. □

Ví dụ 1.46. Ba xạ thủ cùng bắn độc lập vào bia, mỗi người bắn một viên đạn. Xác suất bắn trúng của từng xạ thủ lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia.

Hướng dẫn. Gọi A, B, C lần lượt là các biến cố: "Người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng bia". Ta có $P(A) = 0,6; P(B) = 0,7; P(C) = 0,8$. Gọi X là biến cố "ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia" thì $\overline{X}$ là biến cố "cả ba xạ thủ không bắn trúng bia" và

$$P(\overline{X}) = P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 0,024$$

Vậy xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia là $P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 0,976$. □

Ví dụ 1.47. Bắn liên tiếp vào một mục tiêu đến khi viên đạn đầu tiên trúng mục tiêu thì dừng. Tính xác suất sao cho phải bắn đến viên đạn thứ 6. Biết rằng xác suất trúng mục tiêu của mỗi viên đạn là 0,2 và các lần bắn độc lập với nhau.

Hướng dẫn. $P = (0,8)^5.0,2 = 0,065536$ □

Ví dụ 1.48. Chọn ngẫu nhiên 4 quân bài trong một bộ bài gồm 52 quân. Tính xác suất để chọn được ít nhất 3 lá K.

Hướng dẫn. Gọi A là biến cố "chọn được đúng 3 lá K", B là biến cố "chọn được 4 lá K" thì A và B là hai biến cố xung khắc và biến cố "chọn được ít nhất 3 lá K" là $A \cup B$. Ta có:

$$P(A) = \frac{C_4^3 C_{48}^1}{C_{52}^4}, P(B) = \frac{C_4^4}{C_{52}^4}$$

Vậy xác suất để "chọn được ít nhất 3 lá K" là: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,04.$ □

1.3.3 Bài tập

Bài 1.76. Tập A gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau lập từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc A. Tính xác suất để số được chọn là số chẵn?

Bài 1.77. Gọi A là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số: $1, 2, 3, 4, 5$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ A, tính xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4.

Bài 1.78. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng đơn vị và hàng chục đều là chữ số chẵn.

Bài 1.79. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn lớn hơn số 2014.

Bài 1.80. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm năm chữ số phân biệt chọn từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn có chữ số 5.

Bài 1.81. Một chàng trai gọi điện thoại cho bạn gái nhưng quên ba chữ số cuối cùng của số điện thoại cần gọi. Cậu ta chỉ nhớ rằng ba chữ số đều khác nhau và trong ba chữ số đó chắc chắn có một chữ số là 8. Tính xác suất để cậu ta bấm số một lần đúng số điện thoại cần gọi.

Bài 1.82. Cho tập hợp $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau thuộc E. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc M. Tính xác suất để tổng các chữ số của số đó bằng 10.

Bài 1.83. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau và đều khác 0. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

Bài 1.84. Cho tập X gồm các số tự nhiên có ba chữ số phân biệt được lập từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Chọn ngẫu nhiên một số từ X, tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 8.

Bài 1.85. Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập $S = \{1, 2, 3...11\}$. Tính xác suất để tổng ba số được chọn là 12.

Bài 1.86. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số trong các số được lập, tính xác suất để số được lấy có hai chữ số chẵn, hai chữ số lẻ.

Bài 1.87. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ M, tính xác suất để số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa hai chữ số lẻ (các chữ số liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ).

Bài 1.88. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được lập từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau thuộc E. Tính xác suất để trong hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5.

Bài 1.89. Có hai cái hộp A và B đựng các cây bút. Hộp A gồm 5 cây bút màu đỏ và 6 cây bút màu xanh. Hộp B gồm 7 cây bút màu đỏ và 8 cây bút màu xanh. Lấy ngẫu nhiên cùng một lúc từ mỗi hộp ra một cây bút. Tính xác suất sao cho hai cây bút được lấy ra cùng màu?

Bài 1.90. Có 5 bông hoa hồng bạch, 7 bông hoa hồng nhung và 4 bông hoa cúc vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 bông hoa. Tính xác suất để 3 bông hoa được chọn không cùng một loại.

Bài 1.91. Một hộp đựng 12 quả cầu trong đó có 3 quả màu trắng, 4 quả màu xanh và 5 quả màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Hãy tính xác suất sao cho 3 quả đó cùng màu.

Bài 1.92. Một hộp đựng 20 quả bóng. Trong đó có 4 quả màu xanh, 5 quả màu đỏ, 5 quả màu trắng và 6 quả màu vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 quả bóng. Tính xác suất để lấy được ít nhất hai quả bóng cùng màu.

Bài 1.93. Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 học sinh để đi tập văn nghệ. Tính xác suất sao cho trong 5 học sinh được chọn có ít nhất một học sinh nữ?

Bài 1.94. Trong một lớp học gồm có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả học sinh nam và học sinh nữ.

Bài 1.95. Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

Bài 1.96. Một chi đoàn có 15 đoàn viên trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 1 nữ.

Bài 1.97. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất sao cho trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam.

Bài 1.98. Một thùng đựng 12 hộp sữa. Trong 12 hộp đó có 5 hộp sữa cam , 7 hộp sữa dâu. Lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa trong thùng, tính xác suất để trong 3 hộp sữa được lấy ra có ít nhất

2 hộp sữa cam.

Bài 1.99. Trong một chiếc hộp có 6 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 bi lấy ra không có đủ cả ba màu?

Bài 1.100. Trong một hộp gồm có 8 viên bi xanh và 6 viên bi trắng, chọn ngẫu nhiên 5 viên bi. Tính xác suất để 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng.

Bài 1.101. Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố 5 viên được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

Bài 1.102. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng, 6 viên bi vàng (các viên bi có kích thước giống nhau, chỉ khác nhau về màu). Người ta chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để 4 viên bi chọn ra không có đủ cả ba màu.

Bài 1.103. Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau.

Bài 1.104. Một tổ có 7 học sinh (trong đó có 3 học sinh nữ và 4 học sinh nam). Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh đó thành một hàng ngang. Tìm xác suất để 3 học sinh nữ ñứng cạnh nhau.

Bài 1.105. Trong giờ Thể dục, tổ 1 lớp 12A có 12 học sinh gồm 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ tập trung ngẫu nhiên theo một hàng dọc. Tính xác suất để người đứng đầu hàng và cuối hàng đều là học sinh nam.

Bài 1.106. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để 4 viên bi được chọn không có đủ 3 màu.

Bài 1.107. Một hộp đựng 3 xanh , 4 bi đỏ và 5 bi vàng . Lấy ngẫu nhiên 5 bi từ hộp. Tính xác suất để trong 5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh và số bi đỏ bằng nhau.

Bài 1.108. Có 10 học sinh lớp A, 9 học sinh lớp B và 8 học sinh lớp C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ các học sinh trên. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp A.

Bài 1.109. Chuẩn bị đón tết Công-gô một đội thanh niên tình nguyện của trường THPT Xuân Trường B gồm 9 học sinh (trong đó có 3 học sinh nữ) được chia thành 3 tổ đều nhau làm công tác vệ sinh môi trường tại nghĩa trang liệt sỹ. Hãy tính xác suất để mỗi tổ có đúng một học sinh nữ.

Bài 1.110. Một lớp học có 33 học sinh, trong đó có 10 học sinh giỏi, 11 học sinh khá và 12 học sinh trung bình. Chọn ngẫu nhiên trong lớp học 4 học sinh tham dự trại hè. Tính xác suất để nhóm học sinh được chọn có đủ học sinh giỏi, học sinh khá và học sinh trung bình.

Bài 1.111. Trường THPT Xuân Trường B có 100 giáo viên, trong đó có 7 cặp vợ chồng. Trường cần cử 2 giáo viên đi chuyên đề về: "Bạo lực học đường" tại Thành phố Nam Định. Tính xác suất để 2 giáo viên được chọn đi tập huấn không là một cặp vợ chồng.

Bài 1.112. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam.

Bài 1.113. Giải bóng chuyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng A, B, C mỗi bảng 3 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau.

Bài 1.114. Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam, 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nữ. Chọn ra từ đó 4 người, tính xác suất trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ ba bộ môn.

Bài 1.115. Trên giá sách có ba loại sách Toán học, Vật lý, Hoá học, trong đó có 8 quyển sách Toán học, 7 quyển sách Vật lý và 5 quyển sách Hoá học (các quyển sách khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách chọn 6 quyển sách trong các quyển sách trên sao cho mỗi loại có ít nhất một quyển sách.

Bài 1.116. Một tổ học sinh có 4 em nữ và 5 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để chỉ có hai em nữ A , B đứng cạnh nhau còn các em nữ còn lại không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh A, B?

Bài 1.117. Một ngân hàng đề thi gồm 20 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Thí sinh A đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất hai câu đã thuộc.

Bài 1.118. Mỗi đề thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ 15 câu hỏi trong một ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi. Bạn Thủy đã học thuộc 8 câu trong ngân hàng đề thi. Tính xác suất để bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất hai câu đã thuộc.

Bài 1.119. Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong số đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, tính xác suất để 3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn có đúng một câu giống nhau.

Bài 1.120. Trong kì thi tốt nghiệp THPT, Bình làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa học. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng; trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Bình trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu; 5 câu còn lại Bình chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi môn Hóa học của Bình không dưới 9,5 điểm.

Bài 1.121. Trong kì thi THPT Quốc gia năm 2015, mỗi thí sinh có thể dự thi tối đa 8 môn: Toán, Lý, Hóa, Sinh, Văn, Sử, Địa và Tiếng anh. Một trường Đại học dự kiến tuyển sinh dựa vào tổng điểm của 3 môn trong kì thi chung và có ít nhất 1 trong hai môn là Toán hoặc Văn. Hỏi trường Đại học đó có bao nhiêu phương án tuyển sinh?

Bài 1.122. Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

Bài 1.123. Một chiếc hộp có chín thẻ giống nhau được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ (không kể thứ tự) rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

Bài 1.124. Cho 100 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2.

Bài 1.125. Có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 10 tấm thẻ được chọn ra có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Bài 1.126. Có 40 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 40. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm. Tính xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 6.

Bài 1.127. Một nhóm học sinh gồm 9 em trong đó có 3 nữ, được chia thành 3 tổ đều nhau. Tính xác suất để mỗi tổ có 1 nữ.

Bài 1.128. Có ba lô hàng. Người ta lấy một cách ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Biết rằng xác suất để được sản phẩm có chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là $0,5; 0,6$ và $0,7$. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt?

Bài 1.129. Có 2 bóng điện với xác suất hỏng là 0,1 và 0,2 (việc chúng hỏng là độc lập với nhau). Tính xác suất để mạch không có điện do bóng hỏng nếu:

1. Chúng được mắc song song.
2. Chúng được mắc nối tiếp.

Bài 1.130. Gieo hai con xúc xắc đối xứng và đồng chất. Gọi A là biến cố tổng số chấm xuất hiện là số lẻ, B là biến cố được ít nhất một mặt một chấm. Tính xác suất:

1. $P(A \cup B)$
2. $P(AB)$

Bài 1.131. Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng của từng người là 0,8 và 0,9. Tính xác suất để:

1. Chỉ có một người bắn trúng mục tiêu.
2. Có ít nhất một người bắn trúng mục tiêu.
3. Cả hai người bắn trượt.

Bài 1.132. Một thầy giáo có 12 quyển sách đôi một khác nhau trong đó có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Vật lý, và 3 quyển sách Hóa học. Ông muốn lấy ra 6 quyển đem tặng cho 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một quyển. Tính xác suất để sau khi tặng sách xong mỗi một trong ba loại Toán, Vật lý, Hóa học đều còn lại ít nhất một quyển.

Bài 1.133. Một hộp chứa 5 bi xanh, 7 bi đỏ và 8 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 8 viên bi từ hộp. Tính xác suất để 8 viên bi được lấy ra có đủ cả 3 màu.

Bài 1.134. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu.

Bài 1.135. Một hôp đựng chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất.

Bài 1.136. Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5, có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để hai viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số?

Bài 1.137. Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là: 1 kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân trong số đó. Tính xác suất để trọng lượng 3 quả cân được chọn không vượt quá 9kg.

Bài 1.138. Cho một đa giác đều 12 đỉnh $A_1A_2...A_{12}$ nội tiếp đường tròn (O). Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn ra tạo thành một hình chữ nhật.

1.4 Nhị thức Newton

1.4.1 Kiến thức cơ bản

- Công thức nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$$

- Tính chất của khai triển:
  - ✓ Có $n+1$ số hạng, số hạng thứ $k+1$ là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$
  - ✓ Số mũ của a giảm dần từ n về 0, còn số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, tổng số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n.

- Một số khai triển thường gặp:
  - ✓ $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$
  - ✓ $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + (-1)^n C_n^n x^n$

- Viết khai triển nhị thức Newton sau:
  ✓ $(x+1)^6$ ✓ $(x-2)^5$ ✓ $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$ ✓ $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$ ✓ $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^6$

1.4.2 Các dạng toán và ví dụ

Dạng 1. Số hạng trong khai triển nhị thức Newton

Sử dụng công thức số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Ví dụ 1.49. Tìm số hạng thứ 5 trong khai triển $(2-x)^{19}$ theo số mũ tăng dần của x.

Ví dụ 1.50. Tìm hệ số của x^{15} trong khai triển $(2x-3x^2)^{10}$?

Hướng dẫn. Ta có

$$(2x-3x^2)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(2x)^{10-k}(-3x^2)^k=\sum_{k=0}^{10}2^{10-k}(-3)^kx^{10+k}$$

Suy ra số hạng chứa x^{15} tương ứng với số hạng chứa k thỏa mãn $10+k=15\Leftrightarrow k=5$.
Vậy hệ số của x^{15} trong khai triển là $C_{10}^5.2^5.(-3)^5=-6^5C_{10}^5$. □

Ví dụ 1.51. [CĐ Cơ khí luyện kim 2007] Tìm số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ trong khai triển nhị thức $(x^3+xy)^{15}$

Hướng dẫn. $C_{15}^5=3003$. □

Ví dụ 1.52. [HV HCQG, 2000] Tìm hệ số x^8 trong khai triển $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{12}$?

Hướng dẫn. Đáp số $C_{12}^2=66$ □

Ví dụ 1.53. Biết rằng $6n-6+C_n^3=C_{n+1}^3$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(2x^3-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^n$

Ví dụ 1.54. [A2002] Cho khai triển: $\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Biết $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ 4 bằng $20n$. Tìm x và n?

Hướng dẫn. Từ $C_n^3=5C_n^1$ tìm được $n=7$. Khi đó, số hạng thứ tư là

$$C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3=20.7\Leftrightarrow C_7^3.2^{2x-2}.2^{-x}=20.7$$

Từ đó tìm được $x=4$. □

Ví dụ 1.55. Tổng các hệ số của số hạng thứ 1, 2, 3 trong khai triển $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^m$ bằng 11. Tìm hệ số của x^2?

Hướng dẫn. Từ $C_m^0+C_m^1+C_m^2=11$ tìm được $m=4$. Khi đó

$$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^4=\sum_{k=0}^{4}C_4^k\left(x^3\right)^{4-k}\left(x^{-2}\right)^k=\sum_{k=0}^{4}C_4^kx^{12-5k}$$

Suy ra hệ số của x^2 ứng với $12-5k=2\Leftrightarrow k=2$. Vậy hệ số cần tìm là $C_4^2=6$. □

Ví dụ 1.56. [Đại học Thuỷ lợi cơ sở II, 2000] Khai triển và rút gọn đa thức:

$$Q\left(x\right)=\left(1+x\right)^9+\left(1+x\right)^{10}+...+\left(1+x\right)^{14}$$

Ta được đa thức: $Q\left(x\right)=a_0+a_1x+...+a_{14}x^{14}$. Hãy xác định hệ số a_9.

Hướng dẫn. Hệ số của x^9 trong các đa thức $\left(1+x\right)^9,\left(1+x\right)^{10},...,\left(1+x\right)^{14}$ lần lượt là: $C_9^9,C_{10}^9,...,C_{14}^9$.
Do đó $a_9=C_9^9+C_{10}^9+...+C_{14}^9=3003$. □

Ví dụ 1.57. [A2012] Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$ với $x \neq 0$.

Hướng dẫn. Điều kiện $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. Từ $5C_n^{n-1} = C_n^3$ tìm được $n = 7$. Khi đó

$$\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n = \left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k \left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{7} C_7^k \frac{1}{2^{7-k}}(-1)^k x^{14-3k}$$

Do đó, số hạng chứa x^5 tương ứng với $14 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = 3$.
Vậy số hạng chứa x^5 là $C_7^3 \frac{1}{2^4}(-1)^3 x^5 = -\frac{35}{16}x^5$. □

Ví dụ 1.58. [ĐHSPHN 2000] Cho biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số a $(a \in \mathbb{N}^*)$ của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

Hướng dẫn. Ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$. Từ đó tìm được hệ số $a = C_{10}^6 = 210$ □

Ví dụ 1.59. [D2007] Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

Hướng dẫn. Hệ số của x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5$ là $(-2)^4C_5^4$. Hệ số của x^5 trong khai triển $x^2(1+3x)^{10}$ là $3^3C_{10}^3$.
Do đó, hệ số của của x^5 trong khai triển đã cho là $(-2)^4C_5^4 + 3^3C_{10}^3 = 3320$. □

Ví dụ 1.60. [A2004] Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của: $(1 + x^2(1-x))^8$

Hướng dẫn. Ta có

$$C_8^0 + ... + C_8^3\left(x^2\left(1-x\right)\right)^3 + C_8^4\left(x^2\left(1-x\right)\right)^4 + ... + C_8^8\left(x^2\left(1-x\right)\right)^8$$

Nhận xét rằng, x^8 chỉ có trong các số hạng:

- Số hạng thứ 4 của $C_8^3(x^2\left(1-x\right))^3$ với hệ số $C_8^3.C_3^2$.
- Số hạng thứ 5 của $C_8^4(x^2\left(1-x\right))^4$ với hệ số $C_8^4.C_4^0$.

Vậy hệ số của x^8 trong khai triển đã cho là $C_8^3C_3^2 + C_8^4C_4^0 = 238$. □

Ví dụ 1.61. [HVKTQS, 2000] Khai triển đa thức:

$$P\left(x\right) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + ... + a_{12}x^{12}$$

Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_1, a_2, ..., a_{12}$?

Hướng dẫn. Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển thì $a_k > a_{k-1}$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^kC_{12}^k \geq 2^{k-1}C_{12}^{k-1} \\ 2^kC_{12}^k \geq 2^{k+1}C_{12}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} \geq \frac{1}{12-k+1} \\ \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \end{cases}$$

Suy ra hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^{18} = 126720$ □

Ví dụ 1.62. [ĐH SPHN-2001] Cho khai triển nhị thức:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+...+a_9x^9+a_{10}x^{10}.$$

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Hướng dẫn. Ta có $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\frac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10}=\frac{1}{3^{10}}\sum\limits_{k=0}^{n}C_{10}^k(2x)^k\Rightarrow a_k=\frac{1}{3^{10}}C_{10}^k2^k$
Số hạng có a_k lớn nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a_k\geq a_{k+1}\\ a_k\geq a_{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k2^k\geq C_{10}^{k+1}2^{k+1}\\ C_{10}^k2^k\geq C_{10}^{k-1}2^{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2^k10!}{k!(10-k)!}\geq\frac{2^k10!}{(k+1)!(9-k)!}\\ \frac{2^k10!}{k!(10-k)!}\geq\frac{2^k10!}{(k-1)!(11-k)!}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{10-k}\geq\frac{2}{k+1}\\ \frac{2}{k}\geq\frac{2}{11-k}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{19}{3}\leq k\leq\frac{22}{3}$$

Mà $k\in\mathbb{N},k\in[0,10]$ nên suy ra $k=7$.
Vậy số hạng lớn nhất là $a_k=a_7=\frac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7$. □

Dạng 2. Sử dụng nhị thức Newton để tính tổng

Ví dụ 1.63. Tính tổng $S=2^nC_n^0+2^{n-1}.3C_n^1+2^{n-2}.3^2C_n^2+...+3^nC_n^n$

Ví dụ 1.64. [D2002] Tìm số nguyên dương n thoả mãn hệ thức $C_n^0+2.C_n^1+2^2.C_n^2+...+2^n.C_n^n=243$.

Hướng dẫn. Xét khai triển

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$$

Chọn $x=2$ ta được $3^n=C_n^0+2.C_n^1+2^2.C_n^2+...+2^n.C_n^n=243\Leftrightarrow n=5$. □

Ví dụ 1.65. Tính tổng $S=C_{2015}^0+3C_{2015}^1+3^2C_{2015}^2+...+3^{2015}C_{2015}^{2015}$.

Hướng dẫn. Xét khai triển

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$$

Chọn $x=3$ được $4^{2015}=C_{2015}^0+3C_{2015}^1+3^2C_{2015}^2+...+3^{2015}C_{2015}^{2015}$.
Vậy $S=4^{2015}$. □

Ví dụ 1.66. [ĐH Hàng Hải-2000] Chứng minh rằng: $C_{2n}^0+3^2C_{2n}^2+3^4C_{2n}^4+...+3^{2n}C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$

Hướng dẫn. Ta có

$$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$
$$(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên được

$$(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}=2\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}\right)$$

Cho $x = 3$ thì đẳng thức trở thành

$$(4)^{2n} + (-2)^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n}\right)$$
$$\frac{2^{4n} + 2^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$$

Từ đó suy ra $2^{2n-1}(2^{2n}+1) = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$. □

Ví dụ 1.67. [B2007] Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $(2+x)^n$ biết

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n = 2048$$

Hướng dẫn. Xét khai triển

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + (-1)^n C_n^n$$

Chọn $x = 3$ ta được $2^n = 3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n$. Suy ra $2^n = 2048 \Leftrightarrow n = 11$. Khi đó

$$(2+x)^n = (2+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k 2^{11-k} x^k$$

và số hạng chứa x^{10} ứng với $k = 10$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} là $C_{11}^{10} 2^1 = 22$. □

1.4.3 Bài tập

Bài 1.139. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức Newton: $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$

Bài 1.140. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

Bài 1.141. Số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$ bằng bao nhiêu?

Bài 1.142. [A2004] Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của $\left(1 + x^2(1-x)\right)^8$.

Bài 1.143. [A2006] Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ biết rằng

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{10} - 1$$

Bài 1.144. Tìm các số nguyên dương n sao cho các hệ số của x^4, x^5, x^6 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(1+x)^n$, theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng.

Bài 1.145. [SPHN2000]: Tổng các hệ số của khai triển $(x^2+1)^n$ bằng 1024. Tìm hệ số của x^{12}.

Bài 1.146. Khai triển của nhị thức $(x-2y)^{18}$ được viết dưới dạng

$$(x-2y)^{18} = a_0 x^{18} + a_1 x^{17} y + a_2 x^{16} y^2 + ... + a_{18} y^{18}$$

Tìm hệ số a_{15}?

Bài 1.147. Số hạng chứa x^3 trong khai triển $(x+1)^5(x-2)^7$ có hệ số bằng bao nhiêu?

Bài 1.148. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(1+x+x^2+x^3)^{10}$

Bài 1.149. Tìm hệ số chứa x^5 trong khai triển biểu thức $P = x(1+2x)^n + x^2(1-3x)^{2n}$. Biết rằng $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$.

Bài 1.150. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $6C_{n+1}^{n-1} = A_6^2 + 160$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(1-2x^3)(2+x)^n$.

Bài 1.151. Xét khai triển $(1+x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$. Tìm a_8?

Bài 1.152. Khai triển của nhị thức $(x-2y)^{18}$ được viết dưới dạng

$$(x-2y)^{18} = a_0x^{18} + a_1x^{17}y + a_2x^{16}y^2 + ... + a_{18}y^{18}$$

Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{18}$

Bài 1.153. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho khai triển $(1+x)^n$ có tỉ số hai hệ số liên tiếp bằng 7/15?

Bài 1.154. Cho khai triển $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ với n là số nguyên dương thỏa mãn $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + ... + 2^na_n = 1024$. Tìm hệ số a_8?

Bài 1.155. Chứng minh rằng

$$C_{2014}^0 + C_{2014}^4 + C_{2014}^8 + ... + C_{2014}^{2012} = C_{2014}^2 + C_{2014}^6 + C_{2014}^{10} + ... + C_{2014}^{2014}$$

Bài 1.156. Tính tổng $T = C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + ... + C_{2014}^{1006}$.

Bài 1.157. Chứng minh rằng $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Bài 1.158. Áp dụng khai triển nhị thức $(3x-1)^{16}$, tính

$$3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - 3^{13}C_{16}^3 + ... + C_{16}^{16}$$

Bài 1.159. [CĐSP Bến Tre Khối A-2002] Chứng minh rằng: $C_{20}^1 + C_{20}^1 + ... + C_{20}^{19} = 2^{19}$

Bài 1.160. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta luôn có:

1. $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + .. + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + .. + C_{2n}^{2n-1}$
2. $1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + .. + (-1)^kC_n^k = (-1)^k.C_{n-1}^k$

Bài 1.161. [CĐ2004] Chứng minh rằng: $C_{2004}^0 + 2^2C_{2004}^1 + ... + 2^{2004}C_{2004}^{2004} = \frac{3^{2004}+1}{2}$

Bài 1.162. Tính tổng:

1. $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + .. + C_6^6$
2. $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + .. + 2^5C_5^5$
3. $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - ... - 3C_{16}^{15} + C_{16}^{16}$
4. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + .. + (-1)^n.C_n^n$
5. $3^5C_{10}^0 - 3^4.\sqrt{6}.C_{10}^1 + 3^4.2.C_{10}^2 - 3^3.2\sqrt{6}.C_{10}^3 + 3^3.4.C_{10}^4 - ... + 2^5.C_{10}^{10}$

Bài 1.163. Tính tổng

$$S = \frac{A_{2015}^0}{0!} + \frac{A_{2015}^1}{1!} + \frac{A_{2015}^2}{2!} + ... + \frac{A_{2015}^{2015}}{2015!}$$

Bài 1.164. Tính tổng

$$S = 1^2C_{2015}^1 + 2^2C_{2015}^2 + 3^2C_{2015}^3 + ... + 2015^2C_{2015}^{2015}$$

Bài 1.165. Tính tổng

$$S = \frac{C_{2015}^0}{1} + \frac{C_{2015}^1}{2} + \frac{C_{2015}^2}{3} + ... + \frac{C_{2015}^{2015}}{2016}$$

Bài 1.166. [D2008] Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048$.

Bài 1.167. [THTT-9-2009] Tính tổng $S = 1.2.3.C_n^3 + 2.3.4.C_n^4 + 3.4.5.C_n^5 + (n-2)(n-1)n.C_n^n$

Bài 1.168. [THTT-12-2008] Tính tổng $S = \frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n,\ n \in \mathbb{N}^*$

Bài 1.169. [THTT-9-2009] Tính $S = \frac{1}{1.2}.C_n^0 + \frac{1}{2.3}.C_n^1 + \frac{1}{3.4}.C_n^2 + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.C_n^n$.

Chương 2

ĐÁP SỐ

1.1. Có 15 cách chọn mua một bộ quần áo.

1.2. Đáp số 7.

1.3. 35 cách, 300 cách.

1.4. Có 780 nhãn.

1.5. Có 2.340.000 biển số.

1.6. Có 120 cách.

1.7. Cụ Vũ Bằng có 31 cách gọi hai món để lai rai.

1.8. 24 số.

1.9. 1260 số.

1.10. 24; 24;20.

1.11. Đáp số 60 số.

1.12. 36960

1.13. 1288.

1.14. 24; 66660

1.15. 480

1.16. $32; 24; 64$.

1.17. 20

1.18. Có 625 số, 900 số.

1.24. Có 48 ước số.

1.28. $A = n - 2 - \frac{1}{n-2}, B = (n-4)^2, C = (n+1)(n+2)+1, D = \frac{n(n+1)}{2}$

1.31. 1. $x = 2, x = 3$; 2. $n = 4, n = 5, n = 6$.

1.32. 1. $n = 6$; 2. $n = 3$; 3. $n = 6$; 4. $n = 2, n = 3$; 5. $n = 5$; 6. $x = 2$; 7. $x = 14, x = 8$; 8. $x = 10$; 9. $x = 17$; 10. $n = 8$.

1.33. 1. $n = 3, 4, 5$ 2. $2 \leq n \leq 36$ 3. $n \geq 6$ 4. $n = 6, 7, 8, 9, 10$.

1.34. $x = 3, x = 4$

1.35. 1. $(x, y) = (4, 8)$ 2. $(x, y) = (17, 8)$

1.36. $x = 7, y = 3$

1.37. 1. 4!, 2. 2.3!

1.42. 27216

1.43. Có $3.10.C_9^5 = 3780$.

1.44. $C_9^3.C_6^2 = 1260$

1.45. $C_8^3.C_7^4.C_5^2 = 19600$

1.46. Đáp số: 288 số.

1.47. Có $3.3.6 = 54$ số.

1.48. Có 216 số.

1.49. Có $300 - 120 = 180$ số.

1.51. 378

1.52. Có $C_{50}^3 - C_4^1.C_{48}^1 = 19408$ cách.

1.53. $k = 4; 8$.

1.55. $n = 10$.

1.58. Có $96 - 24 - 18 = 54$ số.

1.59. 1260.

1.60. 645.

1.62. Đáp số: 7440 số.

1.87. 5/54.

1.88. 144/295.

1.89. 83/165.

1.90. $P = 73/80$.

1.91. Đáp số 3/44.

1.92. 283/323.

1.93. Đáp số $1 - C_{20}^5/C_{35}^5 = 2273/2387$.

1.94. Đáp số 4615/5236.

1.95. Đáp số 9/11.

1.98. Đáp số 4/11.

1.110. Chia thành 3 trường hợp. Đáp số 15/31.

1.114. Chia 3 trường hợp. Đáp số 3/7.

1.118. Đáp số 10/13.

1.129. $0,02$ và $0,28$

1.130. 23/36 và 1/6.

1.131. 1. $0,26$ 2. $0,98$ 3. $0,02$.

1.134. Đáp số 26/36.

1.139. Đáp số: -810

1.140. Đáp số: $C_{12}^6 = 924$

1.141. Đáp số: 210

1.143. $k = 6$. Đáp số 210.

1.144. $n = 7, n = 14$

1.145. $n = 10$, hệ số là $C_{10}^4 = 210$.

1.146. -26738688

1.147. Đáp số: 570

1.148. Đáp số: $252 + 45.210 + 210.210 + 210.45 + 45 + 10 = 44407$

1.152. Đáp số: $S = 1$.

1.156. $T = 2^{2012} - 1$.

1.158. Đáp số: 65536.

1.162. 1. 2^6 2. 3^5 3. 2^{16} 4. 0 5.$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{10}$

Chương 3

HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI

1.2. Xét ba phương án, tập con có 1 phần tử, có 2 phần tử và có 3 phần tử.

1.7. Xét ba trường hợp, cụ Vũ Bằng gọi hai món: bò và gà, bò và cua, gà và cua.

1.11. Xét hai trường hợp số có 3 chữ số và số có 4 chữ số.

1.13. Chữ số hàng nghìn phải lớn hơn hoặc bằng 5 và chữ số hàng đơn vị phải chẵn. Chia hai trường hợp, chữ số hàng nghìn là $5, 7, 9$ và chữ số hàng nghìn là $6, 8$. Đáp số có 1288 số.

1.24. Phân tích 12000 thành các thừa số nguyên tố.

1.29. Trước hết ta chứng minh

$$C_{2001}^{k} < C_{2001}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{2001!}{k!(2001-k)!} < \frac{2001!}{(k+1)!(2000-k)!} \Leftrightarrow k+1 < 2001-k \Leftrightarrow k < 1000$$

Như vậy $C_{2001}^{k} \leq C_{2001}^{1000}$ với mọi $k = 0, 1, 2, \ldots, 999$ dấu bằng xảy ra khi $k = 1000$ hoặc $k = 1001$ và $C_{2001}^{k+1} \leq C_{2001}^{1001}$ với mọi $k = 0, 1, 2, \ldots, 999$ dấu bằng xảy ra khi $k = 999$ hoặc $k = 1000$.
Mà

$$C_{2001}^{0} = C_{2001}^{2001} < C_{2001}^{1} = C_{2001}^{2000} < C_{2001}^{2} = C_{2001}^{1999} < C_{2001}^{3} = C_{2001}^{1998} < \ldots < C_{2001}^{1000} = C_{2001}^{1001}$$

1.40. Có A_6^4 số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau; có $1.A_5^3$ số chia hết cho 5.

1.50.

1. Chữ số 2 có 5 vị trí suy ra chữ số 3 có 4 vị trí. Ba chữ số còn lại có A_7^3 cách sắp xếp. Do đó có $5.4.A_7^3 = 4200$ số. **Cách khác.** Chọn ra 5 số từ tập E. Số 2,3 có 1 cách chọn, ba số còn lại có C_7^3 cách chọn. Sắp xếp 5 số này vào vị trí có 5! cách. Như vậy có $1.C_7^3.5! = 4200$ số.

2. Dùng phương pháp lấy trước rồi sắp xếp sau. Có $C_7^3.2!.4! = 1680$ số.

3. Dùng nguyên lý bù trừ, có $C_7^3.5! - C_7^3.2!.4! = 2520$ số.

1.51. Số cách mời 5 người bất kì trong 11 người là: $C_{11}^5 = 462$. Trong số các cách mời ở trên, số cách mời 5 người mà có cả 2 người cùng yêu bạn Nam đến là: $C_2^2.C_9^3 = 84$. Vậy số cách mời thoả mãn bài toán là: $462 - 84 = 378$.

1.54. Số tam giác có 1 đỉnh thuộc d_1, 2 đỉnh thuộc d_2 là $C_{10}^1 C_n^2$. Số tam giác có 2 đỉnh thuộc d_1, 1 đỉnh thuộc d_2 là: $C_{10}^2 C_n^1$. Theo đề bài có phương trình $C_{10}^1 C_n^2 + C_{10}^2 C_n^1 = 2800$. Đáp số $n = 20$.

1.56. Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ...A_{2n}$ là C_{2n}^3. Hình chữ nhật nội tiếp đường tròn (O) có hai đường chéo qua O và ngược lại cứ hai đường chéo qua tâm có một hình chữ nhật, mà đa giác đều có n đường chéo qua tâm nên số hình chữ nhật là C_n^2. Theo bài ra ta có C_{2n}^3=$20C_n^2$. Tìm được $n = 8$.

1.57. Xét hai khả năng: Đội tuyển *có Vũ Mạnh Cường, không có Ngô Thu Thủy* và *có Ngô Thu Thủy, không có Vũ Mạnh Cường*. Đáp số: 2220 cách.

1.60. Có $C_{15}^4 - (C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2) = 645$

1.61. Mỗi số thoả mãn đề bài tương ứng với một dãy năm số liên tiếp gồm các chữ số khác nhau đôi một lấy từ 8 số đã cho thoả mãn: Vị trí đầu tiên khác số 0 và số 0 xuất hiện 1 lần ở trong 4 vị trí còn lại. Vậy tất cả có $4A_7^4$ số.

1.62. Xét hai trường hợp:

- Số phải tìm chứa bộ 123. Lấy 4 chữ số $\{0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ có A74 cách. Cài bộ 123 vào vị trí đầu, hoặc cuối, hoặc giữa hai chữ số liền nhau trong 4 chữ số vừa lấy, có 5 cách. Suy ra có $5A_7^4 = 4200$ số gồm 7 chữ số khác nhau trong đó chứa bộ 123. Trong các số trên, có $4.A3_6 = 480$ số có chữ số 0 đứng đầu. Do đó có 3720 số phải tìm trong đó có mặt 123.
- Số phải tìm có mặt bộ 321 *(lập luận tương tự.)* Có 3720 số gồm 7 chữ số khác nhau có mặt 321.

1.63. Đáp số $A_5^2 A_4^3 - 4A_4^3 = 384$.

1.64. Có $A_6^4 = 360$ số tất cả. Có $4.A_5^3$ số có mặt chữ số 6. Đáp số 2/3.

1.65. Trường hợp trong số tự nhiên có mặt chữ số 0 có $4.C_4^2.A_4^2 = 288$ số. Trường hợp trong số tự nhiên không có chữ số 0 thì có $C_5^2.A_4^3 = 240$ số tự nhiên. Kết quả có 528 số tự nhiên.

1.66. Gọi số cần lập là $\overline{abcd}$. Xét các khả năng $d = 0, d = 8$ và $d \in \{2, 4, 6\}$.
Đáp số: Có tất cả $C_7^1.3! + (C_8^2.3! - C_7^1.2!) + 3(C_7^1.3! - 2) = 316$.

1.67. Giả sử số có 5 chữ số khác nhau đôi một là: $\overline{abcde}, a \neq 0$. Xét các số $\overline{abcde}$ mà chấp nhận cả $a = 0$ thì có 3 cách chọn vị trí cho chữ số 1, sau đó chọn các chữ số khác nhau cho 4 vị trí còn lại từ 7 chữ số khác 1 của X; nên có $4.A_7^4 = 2520$ số. Trong những số này, có... số mà chữ số 0 đứng đầu. Do đó có 2280 số.

1.68. Có $C_{15}^4 - C_7^4 = 1330$ cách.

1.69. Số cách chọn mà số nữ nhiều hơn số nam là $C_6^5 C_9^3 + C_6^6 C_9^2$.

1.70. Số cách chọn 4 viên bi bất kỳ trong hộp là $C_{15}^4 = 1365$ cách. Chia ra các trường hợp có đủ ba màu suy ra số cách chọn không đủ ba màu.

1.71. Ta xét các trường hợp:
TH1. Trong 5 bi được chọn có 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 3 bi xanh.
TH2. Trong 5 bi được chọn có 2 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh.
Đáp số: $1995/8568 = 95/408$.

1.72. Trong buổi tiệc nếu 30 người đều bắt tay nhau thì có $C_{30}^2 = 435$ cái bắt tay. Trong số này có $C_{15}^2 = 105$ cái bắt tay giữa các bà và 15 cái bắt tay giữa cặp vợ chồng.
Vậy có 435 - 105 - 15 = 315 cái bắt tay.

1.73. Xét khả năng số tự nhiên có 2,3,4,5 chữ số khác nhau. Nên có $A_6^2 + A_6^3 + A_6^4 + A_6^5 = 1230$ số.

1.74. Nếu 6 nam đã được xếp vào 6 ghế thì có 7 khoảng trống để có thể xếp nhiều nhất một nữ vào đó. Chọn 4 khoảng trống trong 7 khoảng trống để xếp mỗi khoảng trống một nữ vào đó. Đáp số: $6!A_7^4 = 120.7!$.

1.75. Chẳng hạn đã vẽ n đường thẳng thỏa mãn đề bài. Ta rút bớt 1 đường thẳng. Như vậy sẽ mất $n-1$ giao điểm. Số miền mất đi là $[(n-1)+1] = n$ miền. Lần lượt rút đi n đường thẳng trên mặt phẳng. Số miền bị mất đi là $n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1$ và còn lại 1 mặt phẳng. Suy ra n đường thẳng lúc đầu chia mặt phẳng thành $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ miền.
Số giao điểm mà n đường thẳng đó tạo ra là hữu hạn. Vẽ đường tròn đủ lớn để tất cả các điểm đó nằm bên trong đường tròn. Ta sẽ nhận được $2n$ giao điểm giữa n đường thẳng và đường tròn. Suy ra số miền không phải là đa giác là $2n$ miền.
Vậy số miền đa giác thỏa mãn đề bài là: $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1 - 2n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2}$.

1.76. Không gian mẫu có A_5^3 phần tử, số phần tử thuận lợi là $2A_4^2$. Do đó xác suất cần tính là 0,4.

1.77. Đáp số $P = \dfrac{C_{36}^1 . C_{24}^2}{C_{60}^3} = \dfrac{2484}{8555}$.

1.78. Số phần tử của tập hợp S là 90. Gọi $\overline{ab}$ là số tự nhiên có hai chữ số mà a, b đều là số chẵn. Ta có $a \in \{2,4,6,8\}, b \in \{0,2,4,6,8\}$ Suy ra có $4.5 = 20$ số thỏa mãn. Đáp số $2/9$.

1.79. Số phần tử của không gian mẫu là A_6^3. Gọi số cần lập là $\overline{abcd}$. Ta xét hai khả năng: $a = 2$ và $a > 2$. Suy ra có $1A_6^3 + 5A_6^3$ phần tử thuận lợi. Đáp số: Xác suất cần tìm là $6/7$.

1.80. Số phần tử của S là $5.A_5^4 = 600$. Gọi A là biến cố "số được chọn có chữ số 5". Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "số được chọn không có chữ số 5". Đáp số 21/25.

1.81. Gọi ba chữ số cuối cùng của số điện thoại là $\overline{abc}, a, b, c$ đôi một khác nhau. Ta xét 3 trường hợp $a = 8, b = 8, c = 8$. Không gian mẫu có $8.9 + 8.9 + 8.9 = 216$ phần tử. Xác suất cần tính là 1/216.

1.82. M có $A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 300$ phần tử. Các tập con của E có tổng các phần tử bằng 10 gồm $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}, E_2 = \{2, 3, 5\}, E_3 = \{1, 4, 5\}$. Gọi A là tập con của M mà mỗi số thuộc A có tổng các chữ số bằng 10. Từ E_1 lập được số các số thuộc A là 4!. Từ mỗi tập E_2 và E_3 lập được số các số thuộc A là 3!. Suy ra số phần tử của A là $4! + 2.3! = 36$. Do đó xác suất cần tìm là $0,12$.

1.83. Số phần tử của tập A: $A_9^3 = 504$. Xét các khả năng, tính được số phần tử thuận lợi là 180. Đáp số 5/14.

1.84. Không gian mẫu có A_6^3 phần tử. Số được chọn có tổng các chữ số bằng 8, có 12 cách. Đáp số $0, 1$.

1.85. Số trường hợp có thể là $C_{11}^3 = 165$. Các bộ số (a, b, c) mà $a + b + c = 12$ và $a < b < c$ là $(1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (3, 4, 5)$. Vậy xác suất cần tính là 7/165.

1.86. Từ 6 chữ số đã cho ta lập được $A_6^4 = 360$ số có 4 chữ số khác nhau. Số cách chọn 2 chữ số chẵn từ 3 chữ số 2,4,6 là C_3^2. Số cách chọn 2 chữ số lẻ từ 3 chữ số 1,3,5 là C_3^2. Từ 4 chữ số được chọn ta lập số có 4 chữ số khác nhau, mỗi số lập được ứng với một hoán vị của 4 phần tử. Theo quy tắc nhân, số các số lập được thỏa mãn yêu cầu là: $C_3^2.C_3^2.4! = 216$. Đáp số 3/5.

1.87. Xét các số có 9 chữ số khác nhau, có $9.A_9^8 = 3265920$ số.
Xét các số thỏa mãn đề bài: Có C_5^4 cách chọn 4 chữ số lẻ. Đầu tiên ta xếp vị trí cho chữ số 0, do chữ số 0 không thể đứng đầu và cuối nên có 7 cách xếp. Tiếp theo ta có A_4^2 cách chọn và xếp hai chữ số lẻ đứng hai bên chữ số 0. Cuối cùng ta có 6! cách xếp 6 chữ số còn lại vào 6 vị trí còn lại. Vậy có $C_5^4.7.A_4^2.6! = 302400$ số thỏa mãn yêu cầu.

1.88. Số phần tử tập E là $A_5^3 = 60$. Số các số thuộc tập E và không có chữ số 5 là $A_4^3 = 24$. Số các số thuộc tập E có chữ số 5 là $60 - 24 = 36$.
Số cách chọn ra hai số khác nhau thuộc tập E là C_{60}^2. Số cách chọn ra hai số khác nhau thuộc tập E trong đó có đúng một số có chữ số 5 là $C_{36}^1.C_{24}^1$.

1.89. Số cách lấy từ mỗi hộp ra một cây viết là $11.15 = 165$ (cách). Có $5.7 = 35$ cách lấy ra bút màu đỏ, $6.8 = 48$ cách lấy ra bút cùng màu xanh. Vậy có 83 cách lấy ra hai bút cùng màu.

1.90. Có C_{16}^3 cách chọn ba bông hoa bất kì. Có C_5^3 cách chọn ba bông chỉ gồm hoa hồng bạch, C_7^3 cách chọn ba bông chỉ gồm hoa hồng nhung và C_4^3 cách chọn ba bông chỉ gồm hoa cúc. Do đó có $C_{16}^3 - C_5^3 - C_7^3 - C_4^3$ cách chọn ba bông hoa không cùng một loại. Vậy xác suất cần tính là...

1.96. Số phần tử của không gian mẫu là $C_{15}^4 = 1365$. Gọi A là biến cố "trong 4 người được chọn có ít nhất 1 nữ". Số kết quả thuận lợi cho A là $C_{15}^4 - C_7^4 = 1330$. Đáp số 38/39.

1.97. Số cách chọn ra 8 người là C_{15}^8. Số cách chọn mà số nữ nhiều hơn số nam là $C_6^5 C_9^3 + C_6^6 C_9^2$. Đáp số 12/143.

1.99. Số cách chọn 4 viên bi bất kỳ trong hộp là $C_{15}^4 = 1365$ cách. Chia ra các trường hợp có đủ ba màu suy ra số cách chọn không đủ ba màu. Đáp số 43/91.

1.100. Số phần tử của không gian mẫu là $C_{14}^5 = 2002$.
Số phần tử thuận lợi là $C_8^1.C_6^4 + C_8^2.C_6^3 + C_8^3.C_6^2 + C_8^4.C_6^1 = 1940$. Đáp số: 970/1001.

1.101. Không gian mẫu có $C_{18}^5 = 8568$ phần tử. Ta xét các trường hợp:
TH1. Trong 5 bi được chọn có 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 3 bi xanh.
TH2. Trong 5 bi được chọn có 2 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh.
Đáp số: $1995/8568 = 95/408$.

1.102. Chia các trường hợp: *2 đỏ, 1 trắng, 1 vàng*; *1 đỏ, 2 trắng, 1 vàng* và *1 đỏ, 1 trắng, 2 vàng.* Đáp số 43/91.

1.103. Gọi không gian mẫu là Ω, A là biến cố "xếp hai nữ đứng cạnh nhau". Ta có $n(\Omega) = 5!$. Đánh thứ tự các vị trí cần xếp từ 1 đến 5. Để 2 nữ đứng cạnh nhau thì vị trí xếp hai nữ là một trong bốn trường hợp: $(1;2), (2;3), (3;4), (4;5)$. Mỗi trường hợp số cách xếp là 2!3! nên tất cả số cách xếp thỏa mãn hai nữ đứng cạnh nhau là $n(A) = 4.2!.3!$ Đáp số 2/5.

1.104. Gọi A là biến cố "3 học sinh nữ cạnh nhau" Số biến cố đồng khả năng: Xếp 7 học sinh ngẫu nhiên, có số hoán vị là 7! Số cách xếp có 3 học sinh nữ cạnh nhau: Coi 3 học sinh nữ là 1 phần tử, kết hợp với 4 học sinh nam suy ra có 5 phần tử, có 5! cách sắp xếp. Với mỗi cách sắp xếp ño lại có 3! cách hoán vị 3 học sinh nữ. Vậy có 5!.3! cách sắp xếp. Đáp số 1/7.

1.105. Số phần tử của không gian mẫu là 12!. Gọi A là biên cố: "Người đứng đầu hàng và cuối hàng của tổ 1 lớp 12A đều là học sinh nam" thì $n(A) = A_7^2.10!$ Đáp số 7/22.

1.106. Không gian mẫu có $C_{15}^4 = 1365$ phần tử. Xét các trường hợp *1 đỏ 1 xanh 2 vàng, 1 đỏ 2 xanh 1 vàng và 2 đỏ 1 xanh 1 vàng.* Đáp số $P = 1 - \dfrac{720}{1365} = \dfrac{43}{91.}$

1.107. Có $C_{12}^5 = 792$ cách chọn 5 bi từ hộp 12 bi. Gọi X là biến cố: "5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh và số bi đỏ bằng nhau" Xét hai trường hợp: *1X, 1Đ, 3V* có 120 cách chọn và *2X, 2Đ, 1V* có 90 cách chọn. Đáp số 35/132.

1.108. Số phần tử không gian mẫu là $C_{27}^5 = 80730$. Xét các trường hợp 5 học sinh chọn ra có *2 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B, 1 học sinh lớp C*; 2 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B, 2 học sinh lớp C và *3 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B, 1 học sinh lớp C*. Đáp số 122/299.

1.109. Số phần tử của không gian mẫu là $C_9^3C_6^3C_3^3 = 1680$. Số kết quả thuận lợi là $3!C_6^2C_4^2C_2^2 = 540$. Đáp số 9/28.

1.111. Đang suy nghĩ :-)

1.112. Số cách chọn ra 8 người là C_{15}^8. Số cách chọn ra 8 người mà số nữ nhiều hơn số nam là $C_6^5.C_9^3 + C_6^6.C_9^2 = 540$. Đáp số 12/143.

1.113. Số phần tử của không gian mẫu là $C_9^3.C_6^3.C_3^3 = 1680$. Số kết quả thuận lợi là $3!C_6^2.C_4^2.{}_2^2 = 540$. Đáp số 9/28.

1.115. Chọn 6 quyển sách trong 20 quyển, ta có $C_{20}^6 = 38760$ cách chọn. Chọn 6 quyển sách chỉ có đúng một loại sách, ta có $C_8^6 + C_7^6 = 35$ cách chọn. Chọn 6 quyển sách chỉ có đúng hai loại sách, ta có $(C_{13}^6 - C_8^6) + (C_{12}^6 - C_7^6) + (C_{15}^6 - C_7^6 - C_8^6) = 7575$ cách chọn. Đáp số 31150.

1.116. Không gian mẫu: $P_9 = 9!$ cách xếp một hàng dọc. Số cách xếp 5 bạn nam là: $P_5 = 5!$. Số cách xếp 4 bạn nữ trong đó bạn A và B đứng cạnh nhau (A và B hoán vị nhau) là $2.A_6^3$. Vậy xác suất cần tính là $P = 5/63$.

1.117. Lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi 4 câu hỏi để lập một đề thi có $C_{20}^4 = 4845$ đề thi. Thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có 2 câu đã thuộc, có $C_{10}^2.C_{10}^2$ trường hợp. Thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có 3 câu đã thuộc, có $C_{10}^3.C_{10}^1$ trường hợp. Thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có 4 câu đã thuộc, có C_{10}^4trường hợp. Đáp số 229/323.

1.119. Không gian mẫu có $C_{10}^3.C_{10}^3$ phần tử. Số phần tử thuận lợi là $C_{10}^3.3.C_7^2$. Đáp số 21/40.

1.120. Bạn Bình được không dưới 9,5 điểm khi và chỉ khỉ trong 5 câu trả lời ngẫu nhiên, Bình trả lời đúng ít nhất 3 câu. Xác suất trả lời đúng một câu hỏi là 0,25; trả lời sai là 0,75.
Xác suất Bình trả lời đúng 3 câu trên 5 câu là $C_5^3.(0,25)^3.(0,75)^2$;
Xác suất Bình trả lời đúng 4 câu trên 5 câu là $C_5^4.(0,25)^4.(0,75)^1$;
Xác suất Bình trả lời đúng cả 5 câu là $C_5^5.(0,25)^5$;
Vậy xác suất Bình được không dưới 9,5 điểm là:

$$C_5^3.(0,25)^3.(0,75)^2 + C_5^4.(0,25)^4.(0,75)^1 + C_5^5.(0,25)^5 = 0,104$$

1.121. TH1: Trường ĐH chỉ xét 1 trong 2 môn Toán hoặc Văn có $2C_6^2 = 30$ cách.
TH2: Trường ĐH xét cả hai môn Toán và Văn có $1C_6^1 = 6$ cách.
Vậy có các trường hợp là: 30 + 6 = 36 (cách)

1.122. Số phần tử của không gian mẫu là $C_{30}^5 = 142506$.
Gọi A là biến cố " đề thi lấy ra là một đề thi " Tốt". Vì trong một đề thi "Tốt" có cả ba câu dễ, trung bình và khó,đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố A
TH1. Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó, trường hợp này có $C_{15}^3 C_{10}^1 C_5^1$ đề thi.
TH2. Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó, trường hợp này có $C_{15}^2 C_{10}^2 C_5^1$ đề thi.
TH3. Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó, trường hợp này có $C_{15}^2 C_{10}^1 C_5^2$ đề thi.
Vậy có tất cả 56875 kết quả thuận lợi cho A. Đáp số 625/1566.

1.123. Số phần tử của không gian mẫu là: $C_9^2 = 36$. Gọi A là biến cố: "kết quả nhận được là số chẵn". Số kết quả thuận lợi cho A là $C_5^1 C_4^1 + C_4^2 = 26$. Xác suất cần tìm là 13/18.

1.124. Số phần tử của không gian mẫu là: C_{100}^3. Do tổng 3 số được chọn chia hết cho 2 nên ta có các trường hợp: Cả 3 số đều chẵn, số cách chọn là: C_{50}^3; trong 3 số có một số chẵn, hai số lẻ có số cách chọn là: $C_{50}^1 C_{50}^2$. Đáp số 1/2.

1.125. Số phần tử của không gian mẫu là C_{40}^{10}. Có 20 tấm thẻ mang số lẻ, 4 tấm thẻ mang số chia hết cho 10, 16 tấm thẻ mang số chẵn và không chia hết cho 10. Do đó số kết quả thuận lợi là $C_{20}^5 C_{16}^4 C_4^1$. Đáp số 1680/12617.

1.126. Không gian mẫu có C_{40}^{10} phần tử. Từ 1 đến 40 có tất cả 20 số chẵn và 20 số lẻ. Số cách chọn 5 tấm thẻ mang số lẻ là C_{20}^5. Trong 20 số chẵn thì có đúng 6 số chia hết hết cho 6 nên số cách chọn 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm mang số chẵn là $C_6^1.C_{14}^4$. Đáp số $P = \dfrac{C_{20}^5.C_{14}^4.C_6^1}{C_{40}^{10}} = \dfrac{126}{1147}$.

1.127. Không gian mẫu có $C_9^3.C_6^3.C_3^3 = 1680$ phần tử. Số phần tử thuận lợi là $3!.C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 540$. Đáp số 27/84.

1.128. Gọi A là biến cố "Sản phẩm lấy ra từ lô thứ nhất là tốt" thì $P(A) = 0.5$; B là biến cố "Sản phẩm lấy ra từ lô thứ hai là tốt" thì $P(B) = 0.6$; C là biến cố "Sản phẩm lấy ra từ lô thứ ba là tốt" thì $P(C) = 0.7$
Các biến cố A, B, C là độc lập. Gọi X là biến cố "Trong các sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt". Suy ra $\overline{X}$ là biến cố "Cả 3 sản phẩm lấy ra chất lượng đều không tốt"
Ta có $\overline{X} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$ nên xác suất cần tính là $P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 0,94$.

1.132. Ta thấy không thể chọn sao cho cùng hết 2 loại sách. Số cách chọn 6 quyển sách sau đó đem tặng từ 12 sách là A_{12}^6. Gọi X là biến cố: "Sau khi tặng sách xong mỗi một trong ba loại Toán, Vật lý, Hóa học đều còn lại ít nhất một quyển" thì $P(X) = 1 - P(\overline{X})$. Số cách chọn sao cho không còn sách Toán là $A_6^5.7$, số cách chọn sao cho không còn sách Vật lý là $A_6^4.A_8^2$, số cách chọn sao cho không còn sách Hóa học là $A_6^3.A_9^3$. Đáp số 115/132.

1.133. Lấy ngẫu nhiên 8 bi từ hộp, không gian mẫu có $C_{20}^8 = 125970$ phần tử. Để chọn được 8 bi không có đủ cả 3 màu, ta có hai phương án: *Chọn 8 bi chỉ có 1 màu (chỉ chọn được màu vàng)* hoặc *chọn 8 bi có 2 màu.* Đáp số 4529/4845.

1.135. Gọi A là biến cố "4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất". Số phần tử của không gian mẫu là $C_{15}^4 = 1365$. Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $C_5^2C_4^1C_6^1 = 240$. Đáp số 16/91.

1.136. Số cách lấy ra hai viên bi từ hộp là $C_{12}^2 = 66$ cách.
Số cách lấy ra hai viên bi gồm 1 viên màu xanh, 1 viên màu đỏ và khác số là 4.4=16. Số cách lấy ra hai viên bi gồm 1 viên màu xanh, 1 viên màu vàng và khác số là 3.4=12. Số cách lấy ra hai viên bi gồm 1 viên màu đỏ, 1 viên màu vàng và khác số là $3.3 = 9$. Như vậy số cách lấy ra hai viên từ hộp vừa khác màu vừa khác số là $16 + 12 + 9 = 37$ cách.
Suy ra xác suất cần tính là: $P = 37/66$

1.137. Không gian mẫu có $C_8^3 = 56$ phần tử. Để được một kết quả thuận lợi của biến cố A , ta có thể chọn theo 7 phương án:... Đáp số 7/56.

1.138. Gọi A là biến cố: "4 đỉnh được chọn tạo thành một hình chữ nhật". Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2...A_{12}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có 6 đường chéo lớn. Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 đỉnh trong 12 điểm $A_1, A_2, ..., A_{12}$ có các đường chéo là hai đường chéo lớn. Ngược lại, mỗi cặp đường chéo lớn có các đầu mút là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Do đó số hình chữ nhật được tạo thành là $n(A) = C_6^2 = 15$. Vậy xác suất cần tính là $P(A) = 1/33$.

1.142. Ta có

$$\begin{aligned}\left[1 + x^2\left(1 - x\right)\right]^8 =& C_8^0 + C_8^1x^2(1-x) + C_8^2x^4(1-x)^2 + C_8^3x^6(1-x)^3 + C_8^4x^8(1-x)^4 + \\ &+ C_8^5x^{10}(1-x)^5 + C_8^6x^{12}(1-x)^6 + C_8^7x^{14}(1-x)^7 + C_8^8x^{16}(1-x)^8\end{aligned}$$

Bậc của x trong ba số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong bốn số hạng cuối lớn hơn 8. Vậy x^8 chỉ có trong các số hạng thứ tư, thứ năm với hệ số tương ứng là $C_8^3.C_3^2, C_8^4.C_4^0$ hay $a_8 = 168 + 70 = 238$.

1.144. Có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^nx^n$, suy ra hệ số của $x^4,\ x^5,\ x^6$ trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(1+x)^n$ lần lượt là $C_n^4,\ C_n^5,\ C_n^6$. Theo giả thiết, có $C_n^4 + C_n^6 = 2C_n^5$. Giải phương trình này tìm được $n = 7$ và $n = 14$.

1.149. Từ $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$ tìm được $n = 5$. Khi đó $P = \sum_{k=0}^{5} C_5^k.2^k.x^{k+1} + \sum_{1=0}^{10} C_{10}^i(-3)^ix^{i+2}$. Do đó hệ số chứa x^5 là $C_5^4.2^4 + C_{10}^3(-3)^3 = -3160$.

1.150. Tìm được $n = 8$. Số hạng chứa x^7 là $C_8^7.2^1.x^7 + 2x^3.C_8^4.2^4.x^4$. Đáp số -2224.

1.151. $a_8 = C_4^4 C_{10}^4 - C_5^3 C_{10}^5 + C_6^2 C_{10}^6 - C_7^1 C_{10}^7 + C_8^0 C_{10}^8 = ...$

1.153. Có $\dfrac{C_n^{k-1}}{C_n^k} = \dfrac{7}{15} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow n = \dfrac{22k}{7} - 1 \Rightarrow k = 7, n = 21.$

1.154. Có $(1+1)^n = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + ... + 2^n a_n = 1024 \Rightarrow n = 10$. Đáp số $a_8 = C_{10}^8 2^{-8}$.

1.155. Có $C_{2014}^k = C_{2014}^{2014-k}$ suy ra điều phải chứng minh.
Cách khác: Có $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, (1+i)^2 = 2i$. Do đó $z = (1+i)^{2014} = ... = -2^{1007} i$ nên phần thực của z bằng 0. Mặt khác, khai triển $(1+i)^{2014}$ được phần thực là $C_{2014}^0 - C_{2014}^2 + C_{2014}^4 - ... + C_{2014}^{2012} - C_{2014}^{2014}$ Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1.156. Có $T + 1 = C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + ... + C_{2014}^{1006}$. Mà $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên suy ra

$$2(T+1) = C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + ... + C_{2014}^{2014}$$

Mặt khác, khai triển $2 = 0^{2014} + 2^{2014} = (1-1)^{2014} + (1+1)^{2014} = ...$

1.157. Ta có$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Vế trái của hệ thức là:

$$\left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n\right)$$

Hệ số của x^{2n} trong hệ thức trên là $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$. Mặt khác, hệ số của x^{2n} trong khai triển $(1+x)^{2n}$ là C_{2n}^2. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1.163. Ta có $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$ do đó $S = (1+1)^{2015} = 2^{2015}$.

1.164. Số hạng tổng quát là

$a_k = k^2 C_{2015}^k = k(k-1+1)C_{2015}^k = k(k-1)C_{2015}^k + kC_{2015}^k = ... = 2014.2015C_{2013}^{k-2} + 2015C_{2014}^{k-1}$.

Đáp số $S = 2015.2016.2^{2013}$

1.165. Chứng minh được số hạng tổng quát $a_k = \frac{C_{2016}^{k+1}}{2016}$. Do đó

$$S = \frac{1}{2016}\left[(1+1)^{2016} - C_{2016}^0\right] = \frac{2^{2016} - 1}{2016}.$$

1.166. Xét khai triển $(1+x)^{2n}$ và cho $x = 1, x = -1$. Đáp số $n = 6$.

1.167. Từ công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta có:

$$\begin{aligned}(k-2)(k-1)kC_n^k &= (k-2)(k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(k-2)(k-1)C_{n-1}^{k-1}\\ &= n(k-2)(n-1)C_{n-2}^{k-2} = n(n-1)(k-2)C_{n-2}^{k-2} = n(n-1)(n-2)C_{n-3}^{k-3}\end{aligned}$$

Suy ra $S = n(n-1)(n-2)\left(C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2 + ... + C_{n-3}^{n-3}\right) = n(n-1)(n-2).2^{n-3}$

1.168. Theo công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta có

$$(k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{k+1}C_n^k$$

Nên

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n \\
&= \frac{1}{n+1}C_{n+1}^1 + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)
\end{aligned}$$

1.169. Sử dụng công thức $\frac{1}{(k+1)}.C_n^k = \frac{1}{(n+1)}.C_{n+1}^{k+1}$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k+1)(k+2)}.C_n^k = \frac{1}{(k+2)(k+1)}.C_n^k &= \frac{1}{(k+2)}.\frac{1}{(n+1)}.C_{n+1}^{k+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)}.\frac{1}{(k+2)}.C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{(n+1)}.\frac{1}{(n+2)}.C_{n+2}^{k+2}
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + ... + C_{n+2}^{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2} - C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2} - n - 3\right)
\end{aligned}$$