Lời nói đầu

Trong chương trình toán ở bậc THPT, vectơ là một khái niệm quan trọng, nó có tính khái quát cao, có thể sử dụng cho cả hình phẳng lẫn hình không gian và thậm chí cả đại số. Nhờ vectơ, ta có thể đưa tọa độ vào bài toán hình học do đó tránh khỏi những sai lầm về mặt trực quan. Cũng nhờ vectơ, nhiều bài toán hình học phẳng, hình học không gian rất khó nếu chỉ giải quyết chúng bằng hình học thuần túy, nhưng lại trở nên đơn giản hơn khi ứng dụng vectơ. Chính vì vậy, nghiên cứu các ứng dụng của vectơ vào việc giải toán hình học, thậm chí cả đại số là một vấn đề khá thú vị và ý nghĩa.

Đối với vectơ, những khía cạnh đáng để quan tâm và có thể dùng để giải quyết các bài toán là khá nhiều, trong đó có việc chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy, hai đường thẳng vuông góc, hay chứng minh cũng như thiết lập các bất đẳng thức ... Nhưng trong khuôn khổ một chuyên đề nhỏ, tôi xin chỉ đề cập đến việc ứng dụng tích vô hướng của hai vectơ vào việc thiết lập và chứng minh bất dẳng thức. Đây là một vấn đề không còn mới về tổng quan và chủ yếu vẫn là khai thác các khía cạnh sau:

- Sử dụng tích vô hướng để tính khoảng cách giữa các điểm đặc biệt, cho các khoảng cách đó không âm hoặc so sánh chúng, ta được các bất đẳng thức.
- Sử dụng bình phương vô hướng của $\vec{u}$ là đại lượng không âm ($\vec{u}$ là một vectơ được chọn đặc biệt)
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ bất kỳ thì $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$
  Suy ra
  +) $\vec{u}.\vec{v} \leqslant |\vec{u}||\vec{v}|$
  +) $\vec{u}.\vec{v} \leqslant 0 \Leftrightarrow 90^o \leqslant (\vec{u}, \vec{v}) \leqslant 180^o$
  +) $\cos(\vec{u}, \vec{v} = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
  từ đó thiết lập và chứng minh các bất đẳng thức

Tuy nhiên khi nhìn nó dưới những góc độ chi tiết hơn, ta vẫn có thể thu được nhiều bài toán thú vị.

1. Khai thác hệ thức Jacobi

Hệ thức Jacobi

Cho tam giác ABC, cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$, điểm M bên trong tam giác. Đặt:

$$x = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}, y = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}, z = \frac{S_{\Delta MBA}}{S_{\Delta ABC}}$$

Ta có $x + y + z = 1$ và:

$$x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0} \quad (1)$$

Đây là hệ thức quen thuộc và chứng minh nó không có gì khó khăn. Tuy nhiên từ đây ta có thể thu được rất nhiều bất đẳng thức trong tam giác khi cho M là những điểm đặc biệt cũng như khi xét mối quan hệ giữa điểm đặc biệt đó.
Trước hết, cho O là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng, ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow x(\vec{MO}+\vec{OA})+y(\vec{MO}+\vec{OB})+z(\vec{MO}+\vec{OC})=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow (x+y+z)\vec{OM}=x\vec{OA}+y\vec{OB}+z\vec{OC}\\
&\Longrightarrow (x+y+z)^2.OM^2=x^2OA^2+y^2OB^2+z^2OC^2+\\
&\qquad\qquad +2xy\vec{OA}\vec{OB}+2yz\vec{OB}\vec{OC}+2zx\vec{OC}\vec{OA}\\
&\Leftrightarrow (x+y+z)^2.OM^2=x^2OA^2+y^2OB^2+z^2OC^2+\\
&\qquad +xy(OA^2+OB^2-c^2)+yz(OB^2+OC^2-a^2)+zx(OA^2+OC^2-b^2)\\
&\Leftrightarrow (x+y+z)^2.OM^2=(x+y+z)(xOA^2+yOB^2+zOC^2)-(xyc^2+yza^2+xzb^2)\\
&\Leftrightarrow OM^2=xOA^2+yOB^2+zOC^2-(xyc^2+yza^2+xzb^2)\quad (2)
\end{aligned}$$

1) Chọn (O,R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
Hệ thức (2) trở thành: $OM^2=R^2-(xyc^2+yza^2+xzb^2)$ (3).
Cho M lần lượt là các điểm đặc biệt trong tam giác, ta có các bài toán sau:

Bài toán 1 Cho tam giác ABC. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$

Lời giải. Khi $M\equiv G$, ta có $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ nên $OG^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$.
Suy ra điều phải chứng minh. ∎

Bài toán 2 Cho tam giác ABC. Chứng minh:
a) $R^2\geqslant \dfrac{abc}{a+b+c}$
b) $R\geqslant 2r$

Lời giải. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
a) Khi $M\equiv I$, ta có :

$$x=\frac{a}{a+b+c};y=\frac{b}{a+b+c};z=\frac{c}{a+b+c}$$

Thay vào (3) ta có: $OI^2=R^2-\dfrac{abc}{a+b+c}\geqslant 0$
b) $OI^2=R^2-\dfrac{4RS}{2p}=R^2-2Rr$. Suy ra điều phải chứng minh. ∎

Ta có bài toán tương tự trong không gian:

Bài toán 2' Cho tứ diện $ABCD$ ngoại tiếp mặt cầu (I, r) và nội tiếp mặt cầu (O, R). Khi đó

$$R^2 \geqslant 9r^2 + OI^2$$

Lời giải. Gọi S_A, S_B, S_C, S_D là diện tích các mặt BCD, ACD, ABD, ABC. Khi đó ta có

$$S_A.\vec{IA} + S_B.\vec{IB} + S_C.\vec{IC} + S_D.\vec{ID} = \vec{0}$$

Với mọi M, ta có

$$\begin{aligned} &S_A.MA^2 + S_B.MB^2 + S_C.MC^2 + S_D.MD^2 \\ &\qquad = S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2 + (S_A + S_B + S_C + S_D)MI^2 \end{aligned}$$

Cho $M \equiv O$, ta có

$$(S_A + S_B + S_C + S_D)R^2 = S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2 + (S_A + S_B + S_C + S_D)OI^2$$
$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2}{(S_A + S_B + S_C + S_D)} + OI^2$$

Ta còn chứng minh:

$$T = \frac{S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2}{(S_A + S_B + S_C + S_D)} \geqslant 9r^2$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} T &= \frac{(S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2)(S_A + S_B + S_C + S_D)}{(S_A + S_B + S_C + S_D)^2} \\ &\geqslant \frac{(S_A.IA + S_B.IB + S_C.IC + S_D.ID)^2}{(S_A + S_B + S_C + S_D)^2} \end{aligned}$$

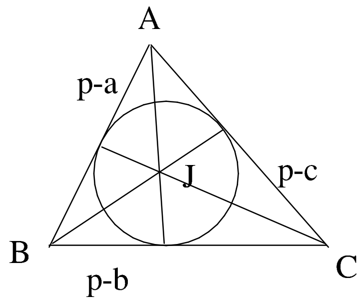
Nhưng $IA \geqslant h_a - r \Rightarrow S_A.IA \geqslant 3V - rS_A$
$\Rightarrow S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2 \geqslant 9V = 3r(S_A + S_B + S_C + S_D)$.
Vậy $T \geqslant 9r^2$. ■

Ngoài ra, trong tam giác còn có một số điểm đặc biệt khác nữa (chủ yếu xét các điểm tạo ra các hệ thức dạng (1) trong đó x, y, z có quan hệ với các cạnh tam giác):

Điểm Giác-Gôn

Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Khi đó ba đường AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm J, gọi là điểm Giác-Gôn. Điểm J thỏa mãn hệ thức

$$(p-b)(p-c)\vec{JA} + (p-c)(p-a)\vec{JB} + (p-a)(p-b)\vec{JC} = \vec{0}$$



Lời giải. AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy là do

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -\frac{p-b}{p-c}.\frac{p-c}{p-a}.\frac{p-a}{p-b} = -1$$

và định lý Cêva
Mặt khác:

$$\frac{S_{\Delta JAB}}{S_{\Delta JAC}} = \frac{p-b}{p-c}, \frac{S_{\Delta JAB}}{S_{\Delta JBC}} = \frac{p-a}{p-c}$$

nên

$$S_{\Delta JAB}(p-c) = S_{\Delta JAC}(p-b) = S_{\Delta JBC}(p-a) = T$$

Do đó

$$x = \frac{S_{\Delta JBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\dfrac{T}{p-a}}{\dfrac{T}{p-a}+\dfrac{T}{p-b}+\dfrac{T}{p-c}} = \frac{\dfrac{1}{p-a}}{\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}}$$

Tương tự có

$$y = \frac{\dfrac{1}{p-b}}{\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}}, z = \frac{\dfrac{1}{p-c}}{\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}}$$

suy ra điều phải chứng minh. ■

Cho M trùng J, ta có bài toán sau:

Bài toán 3 Cho tam giác ABC. Chứng minh:
a) $R^2 \geqslant \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)}[(p-a)a^2+(p-b)b^2+(p-c)c^2]$
b)$4R^2 + Rr \geqslant \sqrt{a^2r_br_c + b^2r_ar_c + c^2r_ar_b}$

c) $\dfrac{1}{2p} \geqslant \dfrac{\sqrt{r^2+rR}}{R(r+4R)}$
trong đó r_a, r_b, r_c, r lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp và nội tiếp tam giác ABC

Lời giải. a) Suy trực tiếp bằng cách thay x, y, z ở trên vào hệ thức

$$OM^2 = R^2 - (xyc^2 + yza^2 + xzb^2) \quad (3)$$

b) Để ý rằng nếu S là diện tích tam giác ABC thì $x = \dfrac{\dfrac{S}{p-a}}{\dfrac{S}{p-a} + \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c}}$

Suy ra

$$x = \frac{r_a}{r_a + r_b + r_c}, y = \frac{r_b}{r_a + r_b + r_c}, z = \frac{r_c}{r_a + r_b + r_c}$$

Mà $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ nên

$$x = \frac{r_a}{4R + r}, y = \frac{r_b}{4R + r}, z = \frac{r_c}{4R + r}$$

Thay vào hệ thức (3) ta có:

$$R^2 \geqslant \frac{a^2 r_b r_c + b^2 r_a r_c + c^2 r_a r_b}{(4R + r)^2}$$

hay

$$4R^2 + Rr \geqslant \sqrt{a^2 r_b r_c + b^2 r_a r_c + c^2 r_a r_b}$$

c) Lại thay

$$x = \frac{\dfrac{1}{p-a}}{\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}}, y = \frac{\dfrac{1}{p-b}}{\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}}, z = \frac{\dfrac{1}{p-c}}{\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}}$$

vào (3) , để ý rằng $(p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{S^2}{p}$ và $(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a) =$
$\dfrac{S^2}{p(p-a)} + \dfrac{S^2}{p(p-b)} + \dfrac{S^2}{p(p-c)} = r(r_a + r_b + r_c)$
$= r(4R + r)$ ta có

$$OJ^2 = R^2 - \frac{S^2}{p(r^2 + 4Rr)^2}[p(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3)]$$

Mặt khác :
$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$,
mà $ab + bc + ca - p^2 = (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) = r(4R + r)$ nên

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$$

Tiếp đó

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} OJ^2 =& R^2 - \frac{S^2}{p(r^2+4Rr)^2}(4pRr + 4pr^2) \\ =& R^2 - \frac{4p^2 r}{(r+4R)^2}(R+r) \end{aligned}$$

Từ $OJ^2 \geqslant 0$ ta có

$$Rr + 4R^2 \geqslant \sqrt{4p^2 r(R+r)}$$

hay

$$\frac{1}{2p} \geqslant \frac{\sqrt{r^2 + rR}}{R(r+4R)}$$

■

Điểm Lơ-moan

Cho tam giác ABC, A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c^2}{b^2}, \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{a^2}{c^2}, \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b^2}{a^2}$$

Khi đó ba đường AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm L thỏa mãn

$$a^2\vec{LA} + b^2\vec{LB} + c^2\vec{LC} = \vec{0}$$

Lời giải. Ba đường đồng quy do định lý Cêva.
Hệ thức cần chứng minh cũng suy ra ngay từ cách xác định các điểm A_1, B_1, C_1. Ta có:

$$x = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, y = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, z = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

và $x\vec{LA} + y\vec{LB} + z\vec{LC} = \vec{0}$ ■

Cho M trùng L, ta được bài toán sau:

Bài toán 4 Cho tam giác ABC. Chứng minh: $R^2 \geqslant \dfrac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

Lời giải. **Cách 1**
Theo bài toán 2, ta có

$$R^2 \geqslant \frac{abc}{a+b+c}$$

Mà $(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$ nên có điều phải chứng minh.
Cách 2
Ta có $OL^2 = R^2 - \dfrac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \geqslant 0$ suy ra điều phải chứng minh. ■

2) Cho $M \equiv I$-tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC
Khi đó $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ hay

$$x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b}{a+b+c}, z = \frac{c}{a+b+c}$$

Cho O lần lượt là các điểm đặc biệt của tam giác ABC, ta có các bài toán sau:

Bài toán 5 a) $3(ab+bc+ca) \geqslant a^2+b^2+c^2+36Rr$

b) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+3bc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+3ac}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+3ba}} \geqslant \dfrac{3}{2}$

Lời giải. a) Cho $O \equiv G$-trọng tâm tam giác, ta có:

$$IG^2 = \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 - \frac{abc^2+bca^2+acb^2}{(a+b+c)^2} \geqslant 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a+b+c}\frac{4}{9}(am_a^2+bm_b^2+cm_c^2) \geqslant \frac{abc}{a+b+c}$$
$$\Leftrightarrow 4am_a^2+4bm_b^2+4cm_c^2 \geqslant 9abc$$
$$\Leftrightarrow a(2b^2+2c^2-a^2)+b(2a^2+2c^2-b^2)+c(2a^2+2b^2-c^2) \geqslant 9abc$$
$$\Leftrightarrow 2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a) \geqslant a^3+b^3+c^3+9abc$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant (a^3+b^3+c^3-3abc)+18abc$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+18.4RS$$
$$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \geqslant a^2+b^2+c^2+36Rr$$

b) Cũng từ

$$IG^2 = \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 - \frac{abc^2+bca^2+acb^2}{(a+b+c)^2} \geqslant 0$$

ta có
$$2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqslant a^3+b^3+c^3+9abc \quad (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+3ac}} + \frac{c}{\sqrt{^2+3ba}}\\ &\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ac}+c\sqrt{c^2+3ab}}\\ &\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{a^3+b^3+c^3+9abc}}\end{aligned}$$

Vậy cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{a^3+b^3+c^3+9abc}} \geqslant \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^3 \geqslant 9(a^3+b^3+c^3+9abc)$$
$$\Leftrightarrow 12(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqslant 5(a^3+b^3+c^3)+57abc$$

Nhưng do (*) thì

$$12(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqslant 6(a^3+b^3+c^3)+54abc \geqslant 5(a^3+b^3+c^3)+57abc$$

Ta có điều phải chứng minh. ■

Bài toán 6 Cho tam giác ABC. Chứng minh a) $4R^2 \geqslant \dfrac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$
b) $4R^2 - 8Rr \geqslant a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

Lời giải. a) Cho $O \equiv H$, ta có

$$aHA^2+bHB^2+cHC^2 = (a+b+c)HI^2 + \frac{a^2bc+b^2ca+c^2ab}{a+b+c}$$

Chú ý rằng $HA^2 = 4R^2-a^2, HB^2 = 4R^2-b^2, hC^2 = 4R^2-c^2$, ta có điều phải chứng minh.
b) Vẫn cho $O \equiv H$, ta có

$$\vec{IH} = \frac{1}{a+b+c}[(b+c)\vec{OA}+(c+a)\vec{OB}+(a+b)\vec{OC}]$$

suy ra

$$IH^2 = [(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]R^2+(b+c)(c+a)(2R^2-c^2)+$$
$$+(c+a)(a+b)(2R^2-a^2)+(b+c)(a+b)(2R^2-b^2) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c)^2 \geqslant (b+c)(c+a)c^2+(c+a)(a+b)a^2+(b+c)(a+b)b^2$$
$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c) \geqslant a^3+b^3+c^3+abc$$
$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c) \geqslant (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+4abc$$
$$\Leftrightarrow 4R^2-8Rr \geqslant a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

■

*) Từ bất đẳng thức trên, thay $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = p^2-3r^2-12Rr$, ta được:

$$4R^2+3r^2+8Rr \geqslant p^2$$

Ngoài ra, ta còn có thể chỉ ra mối quan hệ của các khoảng cách đặc biệt: OI, IG, OH, IH

Bài toán 7 Cho tam giác ABC có O, G, H, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh

a) $OI \geqslant OG \geqslant \dfrac{IH}{2}$

b) $OI \geqslant \dfrac{IG}{\sqrt{2}}$

Lời giải. Trước hết, ta có

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

$$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$$

$$IH^2 = 4R^2 - \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c}$$

$$IG^2 = \frac{1}{3}IH^2 + \frac{2}{3}OI^2 - 2OG^2 = \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{3(a+b+c)}$$

a) Dễ dàng có được $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \geqslant 9abc$ nên $OG \leqslant OI$.

Xét

$$4OG^2 - IH^2 = \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} - \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{9}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} - \dfrac{4(a^2+b^2+c^2)}{9} \geqslant 0$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$5(a^3+b^3+c^3) + 9abc \geqslant 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a)$$

Điều này suy ra từ

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

và

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$

Vậy ta có $OG \geqslant \dfrac{IH}{2}$

b) Dựa vào bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2 \text{ và } a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$

suy ra $IG^2 <= 2R^2 - \dfrac{2abc}{a+b+c} = 2OI^2$. Ta có điều phải chứng minh. ■

2. Khai thác bất đẳng thức $\vec{u}^2 \geqslant 0$

Xét vectơ $\vec{u} = x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC}$, ta luôn có $\vec{u}^2 \geqslant 0$. Từ đó suy ra

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 \geqslant \frac{xyc^2 + yza^2 + zxb^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi M là tâm tỉ cự theo bộ số x, y, z của ba điểm A, B, C.
Ta lại thu được các bài toán sau:

Bài toán 8 Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \geqslant abc$$

Lời giải. Trong (*) cho $x = a, y = b, z = c$, ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. ■

Bài toán 8.1 Tìm điểm M trong tam giác ABC sao cho $T = MA.MB.AB + MB.MC.BC + MA.MC.AC$ nhỏ nhất. Tìm T khi đó.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh $T \geqslant abc$. Thật vậy:
Xét $x = \dfrac{a}{MA}, y = \dfrac{b}{MB}, z = \dfrac{c}{MC}$, ta có

$$x + y + z = \frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} = \frac{a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB}{MA.MB.MC}$$

và

$$xyc^2 + yza^2 + zxb^2 = abc.\frac{c.MC + b.MB + a.MA}{MA.MB.MC}$$

Thay vào (*), ta có

$$c.MC + b.MB + a.MA \geqslant \frac{abc.(c.MC + b.MB + a.MA)}{a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB}$$

hay

$$a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB \geqslant abc$$

Tuy nhiên, nếu nhìn bài toán này theo phép nghịch đảo, ta thấy nó chỉ là hệ quả trực tiếp bài toán 8
Thật vậy:
Xét phép nghịch đảo N_M^1, giả sử phép nghịch đảo này biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.
Ta có

$$MA' = \frac{1}{MA}, MB' = \frac{1}{MB}, MC' = \frac{1}{MC}$$

và

$$A'B' = \frac{AB}{MA.MB}, B'C' = \frac{BC}{MB.MC}, C'A' = \frac{CA}{MC.MA}$$

suy ra
$T \geqslant abc$
$\Leftrightarrow B'C'.MA'^2 + C'A'.MB'^2 + B'A'.MC'^2 \geqslant A'B'.B'C'.C'A'$
Bài toán quay trở về bài toán trên. ■

Bài toán 9 (Chọn đội tuyển Việt Nam đi thi quốc tế 2003)
Cho tam giác ABC. M là điểm trong tam giác. Chứng minh trong các tỉ số $\dfrac{MA}{a}; \dfrac{MB}{b}; \dfrac{MC}{c}$ có ít nhất một tỉ số không bé hơn $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải. Ta chứng minh:
$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geqslant \sqrt{3}$$
Ta có
$$(\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c})^2 \geqslant 3(\frac{MA.MB}{ab} + \frac{MB.MC}{bc} + \frac{MC.MA}{ca})$$
Theo bài trên thì
$$(\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c})^2 \geqslant 3$$
và đây là điều phải chứng minh. ■

Từ bài toán này, ta có một bài toán tương tự trong không gian sau:

Bài toán 9' Goi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và S_i là diện tích các mặt đối diện các đỉnh A_i, $(i = \overline{1;4})$. M là điểm bất lỳ trong không gian. Chứng minh:
$$\frac{MA_1}{S_1} + \frac{MA_2}{S_2} + \frac{MA_3}{S_3} + \frac{MA_4}{S_4} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{2R}$$
Lời giải. Đặt $A_2A_3 = a_1; A_1A_3 = a_2; A_2A_1 = a_3; A_1A_4 = b_1; A_2A_4 = b_2; A_3A_4 = b_3$.
và
$$T = \sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + b_i^2)$$
Gọi G là trọng tâm tứ diện, m_i là độ dài các đường trọng tuyến tương ứng. Ta có $GA_i = \dfrac{3}{4}m_i$.
Do đó
$$\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 = \frac{9}{16}\sum_{i=1}^{4} m_i^2 = \frac{1}{4}T$$
(vì $9m_4^2 = 3(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(*)$ và tương tự cho m_i)
Ta chứng minh $T\sqrt{T} \geqslant 24\sqrt{3}S_i m_i, i = \overline{1;4}$ (1).

Thật vậy:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow T^3 \geqslant 24^2.3.S_i^2.m_i^2 \\ &\Leftrightarrow T \geqslant 12\sqrt[3]{S_i^2 m_i^2}\end{aligned}$$

Mà trong tam giác 3 cạnh a, b, c diện tích S luôn có $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.
Ta được:

$$\begin{aligned}3T = 9m_4^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) &\geqslant 9m_4^2 + 16\sqrt{3}S_4 \\ &= 9m_4^2 + 8\sqrt{3}S_4 + 8\sqrt{3}S_4 \\ &\geqslant 36\sqrt[3]{S_4^2.m_4^2}\end{aligned}$$

hay $T \geqslant 12\sqrt[3]{S_4^2.m_4^2}$.
Tương tự hoàn toàn, (1) được chứng minh.

Lại có:

$$\frac{MA_i}{S_i} = \frac{4MA_iGA_i}{3S_im_i} \geqslant \frac{32\sqrt{3}MA_i.GA_i}{T\sqrt{T}} \geqslant \frac{32\sqrt{3}}{T\sqrt{T}}(\vec{MG}.\vec{GA}_i + GA_i^2)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức thu được, ta có

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{MA_i}{S_i} \geqslant \frac{32\sqrt{3}}{T\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{4} GA_i^2 = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{T}}$$

Nhận xét rằng $T \leqslant 16R^2$, ta có điều phải chứng minh. ■

Từ hệ thức $(*)$ trong lời giải bài toán trên, ta có bài toán

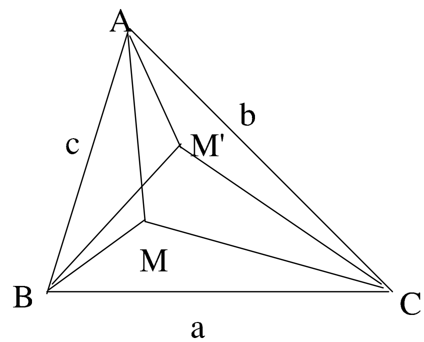
Bài toán 10 Trong một tứ diện, đường trọng tuyến đối diện với mặt có tổng bình phương các cạnh lớn hơn thì lớn hơn

Lời giải. Kết quả này là hệ quả trực tiếp từ hệ thức $(*)$ bằng cách xét hiệu $m_i^2 - m_j^2$ ■

Quay lại với bài toán , tách điểm M thành 2 điểm riêng biệt M, M' trong tam giác, ta có bài toán

Bài toán 11 Cho tam giác ABC, M, M' bên trong tam giác. Chứng minh:

$$a.MA.M'A + b.MB.M'B + c.MC.M'C \geqslant abc$$



Bài toán này không dễ giải quyết vì nó khá tổng quát , M, M' hầu như không có mối liên hệ nào. Tuy nhiên, ta có thể giải quyết một số bài toán trong các trường hợp riêng của nó

Bài toán 11.1 Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. M bên trong tam giác .Chứng minh

$$a.MA.IA + b.MB.IB + c.MC.IC \geqslant abc$$

Lời giải. Ta có $a.MA.IA \geqslant a.\vec{MA}.\vec{IA} = a(\vec{MI}.\vec{IA} + IA^2)$
Suy ra

$$a.MA.IA + b.MB.IB + c.MC.IC \geqslant \vec{MI}(a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC}) + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$$

■

Tiến gần tới bài toán tổng quát hơn một chút, ta có bài toán sau:

Bài toán 11.2 Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. M, M' bên trong tam giác sao cho $\angle MIM' \leqslant 90^o$. Chứng minh

$$a.MA.M'A + b.MB.M'B + c.MC.M'C \geqslant abc$$

Lời giải. Ta có $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$
Suy ra

$$\vec{u} = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a+b+c)\vec{MI}$$
$$\vec{v} = a\vec{M'A} + b\vec{M'B} + c\vec{M'C} = (a+b+c)\vec{M'I}$$

Mà

$$\vec{u}^2 = (aMA^2 + bMB^2 + cMC^2)(a+b+c) - abc(a+b+c)$$
$$\vec{v}^2 = (aM'A^2 + bM'B^2 + cM'C^2)(a+b+c) - abc(a+b+c)$$

nên

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = abc + \frac{1}{a+b+c}(a+b+c)^2\vec{MI}^2 = abc + (a+b+c)MI^2$$
$$aM'A^2 + bM'B^2 + cM'C^2 = abc + \frac{1}{a+b+c}(a+b+c)^2\vec{M'I}^2 = abc + (a+b+c)M'I^2$$

và

$$\begin{aligned}
a.MA.M'A \geqslant a.\vec{MA}.\vec{M'A} = \frac{1}{2}(a.MA^2 + a.M'A^2 - a.M'M^2)\\
b.MB.M'B \geqslant a.\vec{MB}.\vec{M'B} = \frac{1}{2}(b.MB^2 + b.M'B^2 - b.M'M^2)\\
a.MC.M'C \geqslant a.\vec{MC}.\vec{M'C} = \frac{1}{2}(c.MC^2 + c.M'C^2 - c.M'M^2)
\end{aligned}$$

Vậy $a.MA.M'A + b.MB.M'B + a.MC.M'C$

$\geqslant \frac{1}{2}[aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 + aM'A^2 + bM'B^2 + cM'C^2 - (a+b+c)M'M^2]$

$\Leftrightarrow a.MA.M'A + b.MB.M'B + a.MC.M'C$

$\geqslant abc + \frac{1}{2}(a+b+c)(MI^2 + M'I^2 - M'M^2)$

Do $\angle MIM' \leqslant 90^o$ nên $MI^2 + M'I^2 - M'M^2 \geqslant 0$.

Điều này dẫn đến

$$a.MA.M'A + b.MB.M'B + c.MC.M'C \geqslant abc$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M' \equiv I$ ■

***) Chú ý:**

1) Thực ra trong lời giải của hai bài toán 11.1 và 11.2 không cần đến giả thiết M, M' nằm trong tam giác ABC

2) Trong bài toán 11 trên, khi M' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có bài toán quen thuộc

$$a.MA + b.MB + c.MC \geqslant 4S$$

Điều này cho thấy có thể không cần đến giả thiết $\angle MIM' \leqslant 90^o$, có nghĩa là bài toán 11 có nhiều khả năng là một kết quả đúng.

3) Phương pháp chứng minh bài toán tổng quát hơi khác so với việc chứng minh các trường hợp đặc biệt và sẽ được đề cập ở phần sau.

3. Khai thác định nghĩa tích vô hướng

Tiếp theo ta khai thác định nghĩa tích vô hướng

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Định nghĩa này dẫn tới một số tính chất

1) $\vec{u}.\vec{v} \leqslant |\vec{u}|.|\vec{v}|$

2) $\vec{u}.\vec{v} \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \geqslant 0 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \leqslant 90^o$

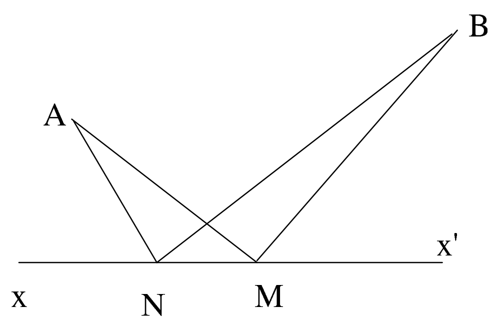
Ta có một số bài toán sau:

Bài toán 12 Cho đường thẳng xx' và hai điểm A, B nằm về một phía của nó, $M \in xx'$. Biết rằng

$$\frac{\cos\angle AMx}{\cos\angle BMx} = \frac{b}{a}(a, b > 0)$$

Chứng minh với mọi N trên xx', ta có

$$aNA + bNB \geqslant aMA + bMB$$



Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} aNA + bNB &= \frac{a}{MA}.NA.MA + \frac{b}{MB}.NB.MB \\ &\geqslant \frac{a}{MA}.\vec{NA}.\vec{MA} + \frac{b}{MB}.\vec{NB}.\vec{MB} \\ &= aMA + bMB + \vec{NM}(a\frac{\vec{MA}}{MA} + b\frac{\vec{MB}}{MB}) \end{aligned}$$

Còn lại ta chứng minh:

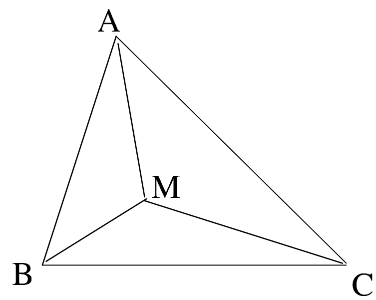
$$a\frac{\vec{MA}}{MA} + b\frac{\vec{MB}}{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\cos(\vec{NM}, \vec{MA}) + b\cos(\vec{NM}, \vec{MB}) = 0$$

+) Nếu $N \in Mx$ thì $a\cos(\vec{NM}, \vec{MA}) + b\cos(\vec{NM}, \vec{MB}) = -a\cos\angle AMx + b\cos\angle BMx = 0$
+) Nếu $N \in Mx'$ hoàn toàn tương tự, ta cũng có $a\cos(\vec{NM}, \vec{MA}) + b\cos(\vec{NM}, \vec{MB}) = 0$.
Vậy

$$aNA + bNB \geqslant aMA + bMB$$

■

Bài toán 13 Cho tam giác ABC không có góc nào vượt quá 120^o. Tìm điểm M sao cho $MA + MB + MC$ nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất khi đó



Lời giải. Cho điểm X bất kỳ, ta có:

$$MA = \frac{MA.XA}{XA} \geqslant \frac{\vec{MA}.\vec{XA}}{XA} = \vec{MX}\frac{\vec{XA}}{XA} + XA$$

nên

$$MA + MB + MC \geqslant \vec{MX}(\frac{\vec{XA}}{XA} + \frac{\vec{XB}}{XB} + \frac{\vec{XC}}{XC}) + XA + XB + XC$$

Chọn X sao cho $\frac{\vec{XA}}{XA} + \frac{\vec{XB}}{XB} + \frac{\vec{XC}}{XC} = \vec{0}$ thì ta được

$$MA + MB + MC \geqslant XA + XB + XC$$

Còn lại là phải chỉ ra X cố định và tính $XA + XB + XC$. Đặt $\frac{\vec{XA}}{XA} = \vec{i}$, $\frac{\vec{XB}}{XB} = \vec{j}$, $\frac{\vec{XC}}{XC} = \vec{k}$, ta có

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \vec{0}$$

suy ra $(\vec{i} + \vec{j})^2 = \vec{k}^2 \Rightarrow \cos\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = -\frac{1}{2}$ hay $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = 120^o$

Tương tự, $\widehat{(\vec{i}, \vec{k})} = 120^o$ và do đó X là điểm nhìn ba cạnh tam giác với góc 120^o (Điểm Toricelli).

Rõ ràng nếu X là điểm Toricelli thì $\frac{\vec{XA}}{XA} + \frac{\vec{XB}}{XB} + \frac{\vec{XC}}{XC} = \vec{0}$ và X là điểm cố định.

Mặt khác

$$\begin{aligned}(XA + XB + XC)^2 &= XA^2 + XB^2 + XC^2 + 2(XA.XB + XB.XC + XC.XA) \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}\end{aligned}$$

(vì định lý hàm số cosin và công thức tính diện tích: $S = \frac{1}{2}bc\sin A$)

Vậy $MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}}$ khi M là điểm Toricelli của tam giác. ■

Các bài toán sau là hệ quả của bài toán về điểm Toricelli.

Bài toán 13.1 Cho tam giác ABC. M là điểm Toricelli của tam giác. Chứng minh

$$a^2.MA + b^2.MB + c^2.MC \leqslant \frac{1}{3}(MA + MB + MC)^3$$

Lời giải. Đặt $MA = x, MB = y, MC = z$, ta có các hệ thức

$$a^2 = y^2 + yz + z^2; b^2 = z^2 + zx + x^2; c^2 = x^2 + xy + y^2$$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$(y^2 + yz + z^2)x + (z^2 + zx + x^2)y + (x^2 + xy + y^2)z \leqslant \frac{1}{3}(x + y + z)^3$$

Điều này tương đương với

$$xy + yz + zx \leqslant x^2 + y^2 + z^2$$

Ta được điều phải chứng minh ■

Bài toán 13.2 Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Đặt

$$a = \sqrt{y^2 + yz + z^2}; b = \sqrt{z^2 + zx + x^2}; c = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

Chứng minh: $ab + bc + ca \geqslant 1$

Lời giải. Giả sử cho điểm M bất kỳ trong mặt phẳng.
Dựng các điểm A, B, C sao cho $MA = x; MB = y; MC = z$ và $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^o$.
Khi đó MA là điểm Toricelli của tam giác ABC có ba cạnh $BC = a; CA = b; AB = c$.
Ta cần chứng minh

$$ab + bc + ca \geqslant 1 = MA + MB + MC = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}}$$

hay

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3} + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

Đây là một bất đẳng thức đúng ■

Bài toán 13.3 (Đề thi HSGQG Việt Nam 1998)
Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P(x; y) = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2}$$

Lời giải. Trong mặt phẳng tọa độ xOy xét điểm $M(x; y)$ và các điểm $A(-1; 1); B(1; -1); C(-2; -2)$.
Ta có $\vec{AB} = (2; -2); \vec{BC} = (-3; -1); \vec{CA} = (1; 3)$
Suy ra $c = AB = 2\sqrt{2}; a = BC = \sqrt{10} = AC = b$ nên A, B, C là ba đỉnh một tam giác cân tại C, không có góc nào vượt quá 120^o

Bài toán trở thành: Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA+MB+MC$.

Theo bài toán 13, ta có $MA+MB+MC \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2S\sqrt{3}}$ và dấu bằng xảy ra khi M là điểm Toricelli của tam giác ABC nên việc còn lại là tính diện tích S của tam giác ABC.

Ta có $2S = bc.\sin A$ và $\cos A = \frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{b.c} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Vậy $2S = 8$ Cuối cùng, ta có $P(x;y)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{14+8\sqrt{3}}$. ■

Tương tự, ta có một bài toán trong không gian sau:

Bài toán 14 Cho tứ diện $ABCD$. X là điểm trong không gian sao cho $XA+XB+XC+XD$ nhỏ nhất. Chứng minh: X nhìn các cạnh đối diện của tứ diện dưới các góc bằng nhau

Lời giải. Gọi X là điểm sao cho

$$\frac{\vec{XA}}{XA}+\frac{\vec{XB}}{XB}+\frac{\vec{XC}}{XC}+\frac{\vec{XD}}{XD}=\vec{0}$$

Khi đó $\forall M$, ta có

$$MA+MB+MC+MD \geqslant \vec{MX}\left(\frac{\vec{XA}}{XA}+\frac{\vec{XB}}{XB}+\frac{\vec{XC}}{XC}+\frac{\vec{XD}}{XD}\right)+XA+XB+XC+XD$$

suy ra

$$MA+MB+MC+MD \geqslant XA+XB+XB+XD$$

Đặt $\frac{\vec{XA}}{XA}=\vec{i}, \frac{\vec{XB}}{XB}=\vec{j}, \frac{\vec{XC}}{XC}=\vec{k}, \frac{\vec{XD}}{XD}=\vec{l}$ ta có

$$\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{l}=\vec{0}$$

Suy ra $(\vec{i}+\vec{j})^2=(\vec{k}+\vec{l})^2 \Rightarrow \widehat{(\vec{i},\vec{j})}=\widehat{(\vec{k},\vec{l})}$ hay X nhìn AB và CD dưới những góc bằng nhau. Tương tự với các cặp cạnh đối diện còn lại. ■

Tiếp đó là một bài toán tương tự trong phẳng

Bài toán 15 Cho tam giác ABC. Khi đó $\forall M$ ta có

$$aMB+bMC+cMA \geqslant \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2c^2}$$

Lời giải. Gọi X là điểm thỏa mãn

$$a\frac{\vec{XB}}{XB}+b\frac{\vec{XC}}{XC}+c\frac{\vec{XA}}{XA}=\vec{0}$$

Khi đó

$$aMB+bMC+cMA \geqslant \vec{MX}\left(a\frac{\vec{XB}}{XB}+b\frac{\vec{XC}}{XC}+c\frac{\vec{XA}}{XA}\right)+aXB+bXC+cXA$$

hay $aMA + bMB + cMC \geqslant aXB + bXC + cXA$.
Đặt $\dfrac{\vec{XB}}{XB} = \vec{i}$, $\dfrac{\vec{XC}}{XC} = \vec{j}$, $\dfrac{\vec{XA}}{XA} = \vec{k}$, ta có

$$a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0}$$

Mặt khác, đặt $\vec{i'} = \dfrac{\vec{BC}}{a}; \vec{j'} = \dfrac{\vec{CA}}{b}; \vec{k'} = \dfrac{\vec{AB}}{c}$, ta cũng có

$$a\vec{i'} + b\vec{j'} + c\vec{k'} = \vec{0}$$

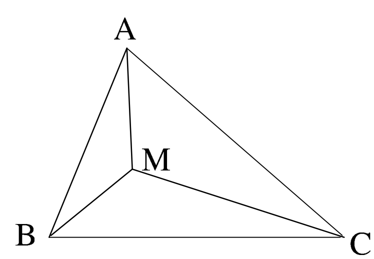
Do đó

$$\left\{ \begin{array}{l} (a\vec{i} + b\vec{j})^2 = c^2 \\ (a\vec{i'} + b\vec{j'})^2 = c^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + 2ab\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = c^2 \\ a^2 + b^2 + 2ab\cos(\widehat{\vec{i'}, \vec{j'}}) = c^2 \end{array} \right.$$

Suy ra $\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = \cos(\widehat{\vec{i'}, \vec{j'}})$ hay $\angle BXC = 180^o - \angle BCA$
Từ đó : $\angle XBC + \angle XCB = \angle XCB + \angle XCA \Longrightarrow \angle XBC = \angle XCA$.
Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\angle XBC = \angle XCA = \angle XAB = \alpha$$

(X là một điểm Brôca của tam giác ABC)



Ta đi tính XA, XB, XC theo a, c, b.
Ta có

$$\begin{aligned} b^2 &= XA^2 + XC^2 - 2XA.XC.\cos\angle AMC \\ &= XA^2 + XC^2 - 2XA.XC.\cos A \end{aligned}$$

và

$$\frac{XA}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\angle AXC} = \frac{b}{\sin A}$$
$$\frac{XC}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin C} \Rightarrow \frac{XA}{XC} = \frac{bc}{a^2}$$

Suy ra:

$$b^2 = XC^2(1 + \frac{b^2c^2}{a^4} + 2\frac{bc}{a^2}\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})$$

hay

$$XC^2 = \frac{b^2a^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \Rightarrow XC = \frac{a^2b}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Tương tự

$$XA = \frac{b^2c}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}; XB = \frac{c^2a}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Vậy $aXB + bXC + cXA = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$
Ta có điều phải chứng minh. ■

Từ bài toán trên, nhờ cách tính các khoảng cách từ điểm Brôca đến các đỉnh tam giác, ta có bài toán sau:

Bài toán 16 Cho tam giác ABC, $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Lời giải. Trước hết, ta có nhận xét sau: Với mọi M, N trong tam giác ABC thì

$$\begin{aligned} &MA.\sin\angle BNC + MB.\sin\angle CNA + MC.\sin\angle ANB \\ &\quad \geqslant NA.\sin\angle BNC + NB.\sin\angle CNA + NC.\sin\angle ANB \end{aligned}$$

Tiếp đó cho M và N là hai điểm Brôca của tam giác, chú ý: $\angle BNC = 180^o - B; \angle CNA = 180^o - C; \angle ANB = 180^o - A$ và cách tính như bài trên, ta có điều phải chứng minh. ■

Từ bài toán 15 lại sinh ra một bài toán tương tự như bài toán 13.3

Bài toán 15.1 Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P(x;y) = \sqrt{29[(x-1)^2 + (y+2)^2]} + \sqrt{29[(x-3)^2 + (y-3)^2]} + \sqrt{18[(x+2)^2 + (y-1)^2]}$$

Lời giải. Xét trong hệ toạ độ xOy các điểm $M(x;y); A(-2;1); B(1;-2); C(3;3)$ thì bài toán trở thành: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$a.MB + b.MC + c.MA$$

Theo bài 15 thì

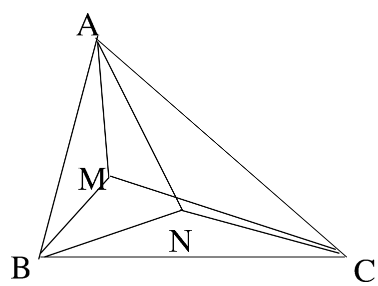
$$a.MB + b.MC + c.MA \geqslant \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

và dấu bằng xảy ra khi M là điểm Brôca thỏa mãn $\angle MBC = \angle MCA = \angle MAB$ ■

Bây giờ quay trở lại bài toán 11. Trước hết, ta có bài toán sau:

Bài toán 11.3 (Dự tuyển IMO 98)
Cho tam giác ABC. M, N là các điểm bên trong tam giác sao cho $\angle MAB = \angle NAC; \angle MBA = \angle NBC$.
Khi đó
$$\frac{MA.NA}{bc} + \frac{MB.NB}{ac} + \frac{MC.NC}{ab} = 1$$
Như vậy, bài toán trên chỉ ra điều kiện xảy ra dấu bằng trong bài toán 11, ta có lời giải bài toán 11 như sau:

Lời giải bài toán 11. Gọi N là điểm thỏa mãn giả thiết trong bài toán trên.



Đặt $\angle MAB = \angle NAC = \alpha; \angle MBA = \angle NBC = \beta$.
Theo định lý Ceva dạng sin thì $\angle MCB = \angle NCA = \gamma$.
Nhận xét rằng:
$$\frac{MA.\vec{NA}}{NA.bc} + \frac{MB.\vec{NB}}{NB.ac} + \frac{MC.\vec{NC}}{NC.ab} = \vec{0} \quad (1)$$
Thật vậy:
Ta có
$$S_{NBC}.\vec{NA} + S_{NAC}.\vec{NB} + S_{NAB}.\vec{NC} = \vec{0}$$
Ta sẽ chứng minh:
$$\frac{\frac{MA}{NA.bc}}{S_{NBC}} = \frac{\frac{MB}{NB.ac}}{S_{NAC}} = \frac{\frac{MC}{NC.ab}}{S_{NBA}}$$
Ta có:
$$\begin{aligned}
&\frac{MA}{NA.b.c.S_{NBC}} = \frac{MB}{NB.b.a.S_{NAC}} \\
&\Leftrightarrow \frac{MA}{MB.b.c.S_{NBC}} = \frac{NA}{NB.b.a.S_{NAC}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha.b.c.NB.a.\sin\beta} = \frac{NA}{NB.c.a.NA.b.\sin\alpha} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}
\end{aligned}$$

Điều này luôn đúng. Vậy (1) được chứng minh.
Lại có

$$\frac{MA.M'A}{bc} = \frac{MA.M'A.NA}{NA.bc}$$
$$\geqslant \frac{MA.\vec{M'A}.\vec{NA}}{NA.bc} = \frac{MA.NA}{bc} + \vec{MM'}\frac{MA.\vec{NA}}{NA.bc}$$

Nên

$$\frac{MA.M'A}{bc} + \frac{MB.M'B}{ac} + \frac{MC.M'C}{ab} \geqslant \frac{MA.NA}{bc} + \frac{MB.NB}{ac} + \frac{MC.NC}{ab} = 1$$

Bài toán được chứng minh. ∎

Bài toán 17 Cho tam giác ABC không cân, gọi G, I, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh

$$\angle GIH > 90^o$$

Lời giải. Ta đi chứng minh: $\vec{IH}.\vec{IG} = \frac{1}{3}(4r^2 - R^2) \leqslant 0$.
Thật vậy, gọi N là trung điểm OH thì N là tâm đường tròn 9 điểm và $IN = \frac{R}{2} - r$.
Hơn nữa $IO^2 = R^2 - 2Rr$ và $\vec{IH} = 2\vec{IN} - \vec{IO}; 3\vec{IG} = 2\vec{IN} + \vec{IO}$.
Vậy $3\vec{IH}\vec{IG} = (4IN^2 - IO^2)$.
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

∎

4. Một vài bất đẳng thức đại số chứng minh bằng tích vô hướng

Bài toán 18 Cho $x_i; y_i(i := \overline{1,n})$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

Lời giải. Xét các điểm $A_i(x_i; y_i)$. Do

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

nên

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i} = \vec{0} \quad (1)$$

Hơn nữa $OA_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.
Từ (1), ta có

$$\sum_{i=1}^{n} OA_i^2 = -2\sum_{i<j} \vec{OA_i}.\vec{OA_j} \leqslant 2\sum_{i<j} OA_i.OA_j$$

Suy ra

$$2\sum_{i=1}^{n} OA_i^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} OA_i)^2$$

Đây là điều phải chứng minh.

■

*) Bài toán này có thể phát biểu theo cách khác như sau:
Cho đa giác trong mặt phẳng có n cạnh là $a_1; a_2; \ldots; a_n$. Chứng minh rằng

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 > 2(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

Đây là bài toán tổng quát của bài toán: Trong tam giác ABC cạnh a, b, c thì $2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2$
*) Trong bài toán trên, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi với mọi i, j, góc giữa $\vec{OA_i}$ và $\vec{OA_j}$ là 180^o. Điều này không xảy ra nên ta có bất đẳng thức thực sự.

Bài toán 19 (Mathlink) Cho 6 số thực a, b, c, x, y, z thỏa mãn

$$(a+b+c)(x+y+z) = 3; (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$$

Chứng minh: $ax + by + cz \geqslant 0$

Lời giải. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ xét các vectơ

$$\vec{u} = (a, b, c); \vec{x_1} = \vec{OX_1} = (x, y, z); \vec{x_2} = \vec{OX_2} = (y, z, x); \vec{x_3} = \vec{OX_3} = (z, x, y)$$

và gọi α_i là góc giữa vectơ $\vec{x_i}$ và $\vec{u}$.
Ta có: $|\vec{x_i}|.|\vec{u}| = 2$ và

$$3 = (a = b + c)(x + y + z) = (\vec{x_1} + \vec{x_2} + \vec{x_3})\vec{u} = \vec{x_1}\vec{u} + \vec{x_2}\vec{u} + \vec{x_3}\vec{u}$$

hay

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = \frac{3}{2}$$

Hơn nữa: $ax + by + cz = \vec{x_1}\vec{u}$. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\alpha_1 \leqslant 90^o$.
Để chứng minh, ta xét bổ đề sau:
Bổ đề: Cho ba vectơ trong không gian có độ dài bằng nhau và các góc tạo bởi hai trong ba vectơ đó đều bằng nhau. Xét một vectơ $\vec{u}$ mà góc tạo bởi vectơ đó với ba vectơ đã cho là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ thỏa mãn $\alpha_1 > 90^o$. Khi đó

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 < \frac{3}{2}$$

Chứng minh. Gọi ϕ là góc giữa các vectơ $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ đã cho.
Giả sử

$$\vec{x_1} = (0;0;1); \vec{x_2} = (m, n, \cos\phi); \vec{x_3} = (m', n', \cos\phi)$$

với

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = \sin^2\phi \\ m'^2 + n'^2 = \sin^2\phi \\ mm' + nn' = \cos\phi - \cos^2\phi \end{cases}$$

Giả sử $\vec{u} = (p, q, r)$, $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 &= r + pm + qn + r\cos\phi + pm' + qn' + r\cos\phi \\ &= r + p(m + m') + q(n + n') + r(2\cos\phi + 1) = A \end{aligned}$$

Do $\cos\alpha_1 = r < 0$ nên
+) Nếu $\phi \geqslant 90^o$ thì $\cos\phi < 0$. Khi đó

$$A^2 \leqslant (p^2 + q^2 + r^2)[(m + m')^2 + (n + n')^2 + 4\cos^2\phi] = 2 + 2\cos\phi \leqslant 2$$

+) Nếu $\phi < 90^o$ thì $\cos\phi > 0$. Khi đó $A < p(m + m') + q(n + n')$ nên

$$A^2 < (p^2 + q^2)[(m + m')^2 + (n + n')^2] \leqslant \sqrt{2(1 + \cos\phi - \cos^2\phi)} < \frac{3}{2}$$

Bổ đề chứng minh xong.
Bài toán trên là hệ quả trực tiếp của bổ đề này. ∎

*) Ngoài bất đẳng thức thu được, ta còn có một loạt các bất đẳng thức tương tự

$$ay + bx + cz \geqslant 0; ay + bz + cx \geqslant 0; ax + bz + cy \geqslant 0; az + bx + cy \geqslant 0; az + by + cx \geqslant 0$$

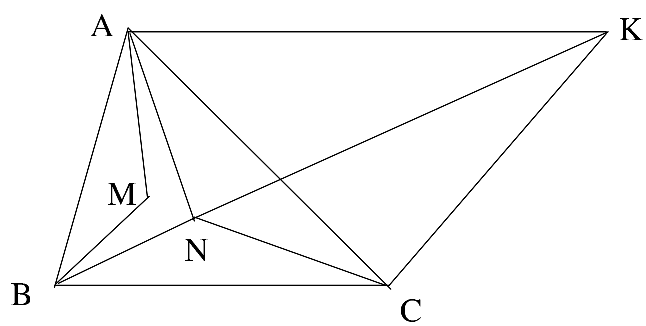
∎

Phụ lục

P1. (Dự tuyển IMO 98)

Cho tam giác ABC. M, N là các điểm bên trong tam giác sao cho $\angle MAB = \angle NAC; \angle MBA = \angle NBC$.
Khi đó
$$\frac{MA.NA}{bc} + \frac{MB.NB}{ac} + \frac{MC.NC}{ab} = 1$$

Lời giải. Trên tia đối của tia NB lấy K sao cho $\angle BCK = \angle BMA$. Khi đó do $\angle MBA = \angle KBC$, ta có hai tam giác BMA và BCK đồng dạng.
Suy ra
$$\frac{CK}{AM} = \frac{BC}{BM}$$
hay
$$CK = \frac{AM.BC}{BM} \quad (1)$$
.



Hơn nữa
$$\frac{BK}{BA} = \frac{BC}{BM}, \angle ABK = \angle MBC$$
nên
$$\Delta ABK \sim \Delta MBC$$
và do đó
$$\frac{AK}{AB} = \frac{CM}{BM}; \frac{BK}{AB} = \frac{BC}{BM}$$
hay $AK = \dfrac{AB.CM}{BM}; BK = \dfrac{AB.BC}{BM}$ (2) Mặt khác, $\angle CKB = \angle MAB = \angle NAC$ nên tứ giác $ANCK$ nội tiếp. Theo định lý Ptoleme, ta có
$$AC.NK = AN.CK + CN.AK \Leftrightarrow AC(BK - BN) = AN.CK + CN.AK \quad (3)$$
Thay $(1), (2)$ vào (3) ta có
$$AC(\frac{AB.BC}{BM} - BN) = AN.\frac{AM.BC}{BM} + CN.\frac{AB.CM}{BM}$$

hay

$$\frac{MA.NA}{bc}+\frac{MB.NB}{ac}+\frac{MC.NC}{ab}=1$$

■

P2

Cho tam giác ABC có các cạnh a,b,c và diện tích S. Chứng minh

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2(1)$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca) \geqslant 4\sqrt{3}S+a^2+b^2+c^2\\
&\Leftrightarrow 4S(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}) \geqslant 4\sqrt{3}S+4S(\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C)\\
&\Leftrightarrow (\frac{1}{\sin A}-\text{cotg}A)+(\frac{1}{\sin B}-\text{cotg}B)+(\frac{1}{\sin C}-\text{cotg}C) \geqslant \sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C} \geqslant \sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \text{tg}(\frac{A}{2})+\text{tg}(\frac{B}{2})+\text{tg}(\frac{C}{2}) \geqslant \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Đây là bài toán quen thuộc. ■

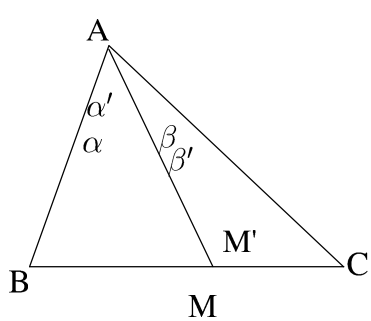
P3 (Định lý Ceva dạng sin)

Cho tam giác ABC. Điểm M,N,P thuộc các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh : AM,BN,CP đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC}.\frac{\sin NBC}{\sin NBA}.\frac{\sin PCA}{\sin PCB}=1$$

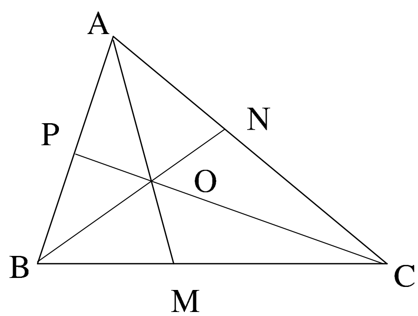
Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề: Cho 4 góc $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ thỏa mãn:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\alpha'+\beta'<180^o\\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}\end{cases}.$$



Khi đó $\alpha=\alpha';\beta=\beta'$.

Chứng minh. Dựng tam giác ABC có $A = \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$.
Lấy M, M' trên BC sao cho
$\begin{cases} \angle BAM = \alpha; \angle CAM = \beta \\ \angle BAM' = \alpha'; \angle CAM' = \beta' \end{cases}.$
Ta có
$$\frac{MB}{MC} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{AM.AB.\sin\alpha}{AM.AC.\sin\beta} = \frac{AM'.AB.\sin\alpha'}{AM'.AC.\sin\beta'} = \frac{M'B}{M'C}$$
Suy ra $M \equiv M'$ hay $\alpha = \alpha'; \beta = \beta'$ ■



Trở lại bài toán chính, nếu AM, BN, CP đồng quy tại O thì

$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC}.\frac{\sin NBC}{\sin NBA}.\frac{\sin PCA}{\sin PCB} = \frac{\sin OAB}{\sin OBA}.\frac{\sin OBC}{\sin OCB}.\frac{\sin OCA}{\sin OAC} = \frac{OB}{OA}.\frac{OC}{OB}.\frac{OA}{OC} = 1$$

Ngược lại, giả sử có
$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC}.\frac{\sin NBC}{\sin NBA}.\frac{\sin PCA}{\sin PCB} = 1$$
và AM cắt BN tại O, theo phần trước,
$$\frac{\sin OAB}{\sin OAC}.\frac{\sin NBC}{\sin NBA}.\frac{\sin PCA}{\sin PCB} = 1$$
Suy ra $\frac{\sin MAB}{\sin MAC} = \frac{\sin OAB}{\sin OAC}$. Theo bổ đề thì $O \in AM$. ■