Mục lục

A. ĐẶT VẤN ĐỀ:

Dựa vào phương pháp toạ độ do chính mình phát minh Descartes đã sáng lập ra môn hình học giải tích .Qua đó cho phép chúng ta nghiên cứu hình học bằng ngôn ngữ đại số thay cho ngôn ngữ hình học.Việc này giúp ta bỏ đi thói quen tư duy cụ thể, trực quan, nhằm đạt tới đỉnh cao của sự khái quát hoá và trừu tượng của toán học và nhiều lĩnh vực khác.

Trong dạy và học toán việc lựa chọn công cụ phù hợp để giải các bài toán là việc làm rất cần thiết, chọn được công cụ thích hợp tất nhiên lời giải sẽ tốt nhất. Sau đây tôi xin trình bày việc sử dụng"*phương pháp vectơ và toạ độ*" để giải một số bài toán sơ cấp ơ' phổ thông.

B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

PHẦN I: LÝ THUYẾT

I. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ DESCARTES VUÔNG GÓC TRONG MẶT PHẲNG.

Định nghĩa:

Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng x'ox, y'oy vuông góc với nhau.Trên Ox, Oy lần lượt chọn các véc tơ đơn vị $\vec{e_1},\vec{e_2}$ .Như vậy ta có một hệ trục toạ độ Descartes vuông góc Oxy.

Toạ độ của một điểm và của một véc tơ:

Cho điểm M trong mp Oxy. Hạ MH vuông góc x'Ox và MK vuông góc y'Oy. Theo qui tắc hình bình hành, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} \\ &= x\vec{e_1} + y\vec{e_2}\end{aligned}$$

Bộ hai (x, y) được hoàn toàn xác định bởi điểm M và được gọi là toạ độ của điểm M, ký hiệu M(x, y).

Cho $\vec{a}$ trên hệ trục. Khi đó tồn tại duy nhất một điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Gọi (x,y) là toạ độ của điểm M . Khi đó bộ hai (x,y) gọi là toạ độ của véc tơ $\vec{a}$ trên hệ trục Oxy và ký hiệu là $\vec{a}$ = (x,y).

Các phép tính véc tơ :

Cho hai véc tơ $\vec{a}=(a_1,a_2)$; $\vec{b}=(b_1,b_2)$ và k là một số thực.

Các phép tính véc tơ như phép cộng, phép trừ, phép nhân một số với một véctơ, tích vô hướng hai véc tơ được xác định như sau:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$$
$$k.\vec{a}=(ka_1,ka_1)$$
$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

Các công thức về lượng :

Cho hai véc tơ $\vec{a}=(a_1;a_2)$; $\vec{b}=(b_1;b_2)$ và gọi α là góc tạo bởi hai véctơ đó

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$ khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véctơ cùng hướng

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1.b_1+a_2.b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

Khoảng cách từ điểm M(x_0, y_0) đến đường thẳng (d):Ax +By +C = 0 là :

$$d(M,d)=\frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Phương trình của đường thẳng, đường tròn .

* Phương trình của đường thẳng (d) đi qua điểm M(x_0, y_0) và nhận véctơ $\vec{n}=(A,B)$ làm véc tơ pháp tuyến là:

A(x – x_0) + B(y – y_0) = 0

* Phương trình đường tròn tâm I (a, b) bán kính R là: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

II.HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ DESCARTES VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.

Định nghĩa :

Trong không gian cho ba đường thẳng x’ox, y’oy, z’Oz vuông góc với nhau đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt chọn các véc tơ đơn vị $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$. Như vậy ta có một hệ trục toạ độ Descartes vuông góc Oxyz.

Toạ độ của một điểm và của một véc tơ.

Cho điểm M trong không gian Oxyz. Hạ MH vuông góc x’Ox, MK vuông góc y’Oy và ML vuông góc z’Oz. Theo qui tắc hình hộp, ta có :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} \\ &= x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}\end{aligned}$$

Bộ ba (x,y,z) được hoàn toàn xác định bởi điểm M và được gọi là toạ độ của điểm M, ký hiệu M(x,y,z).

Cho $\vec{a}$. Khi đó tồn tại duy nhất một điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Gọi (x, y. z) là toạ độ của điểm M. Khi đó bộ ba (x, y, z) gọi là toạ độ của véc tơ $\vec{a}$ trên hệ trục Oxyz và ký hiệu là $\vec{a}$ = (x,y,z).

Các phép tính véc tơ :

Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ và k là một số thực.

Các phép tính vectơ như phép cộng, phép trừ, phép nhân một số với một vectơ, tích vô hướng, tích có hướng hai vectơ được xác định như sau:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_2, a_2 + b_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$k.\vec{a} = (ka_1, ka_1)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\left[\vec{a}.\vec{b}\right] = (\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$$

Các công thức về lượng :

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ và gọi α là góc tạo bởi hai vectơ đó

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$ khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng

Cho (d) là đường thẳng đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_{1,} a_2, a_3)$ và điểm M. Giả sử ta tính được $\overrightarrow{AM} = (b_{1,} b_2, b_3)$ Khi đó khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) được tính là :

$$d(M,d)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

<u>Phương trình của mặt phẳng, đường thẳng và mặt cầu.</u>

a. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$; $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ là :

$$\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

b. Phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ v à nhận vectơ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ làm vectơ chỉ phương là:

$$\begin{cases}x=x_0+a_1t\\ y=y_0+a_2t\\ z=z_0+a_3t\end{cases}\quad \text{(t là tham số)}$$

c. Phương trình mặt cầu tâm I (a, b,c) và có bán kính R là :

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

PHẦN II : CÁC BÀI TOÁN

<u>III. CÁC BÀI TOÁN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG:</u>

<u>CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ</u>:

<u>Bài 1:</u> Cho 4 số thực x_1, x_2, x_3, x_4.

Chứng minh rằng $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\ge(x_1x_2+y_1y_2)^2$

<u>Giải:</u>

Trên mặt phẳng toạ độ xét 2 vectơ : $\vec{a}=(x_1,y_1);\vec{b}=(x_2,y_2)$

Ta có $|\vec{a}||\vec{b}|\ge|\vec{a}.\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\ge(\vec{a}.\vec{b})^2$

vậy $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\geq(x_1x_2+y_1y_2)^2$

đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1$

Bài 2: Chứng minh rằng nếu x, y, z > 0 thì

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}>\sqrt{y^2+yz+z^2}$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{(x+\frac{y}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2}+\sqrt{(x+\frac{z}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2}>\sqrt{(\frac{y}{2}-\frac{z}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2} \quad (1)$$

Xét 3 điểm

$$A(x+\frac{y}{2},\sqrt{\frac{3}{2}}z)\ ;B(0,\frac{\sqrt{3}}{2}y+\sqrt{\frac{3}{2}}z)\ ;C(\frac{y}{2}-\frac{z}{2},0)$$

(1) $\Leftrightarrow$ AB + AC > BC

Ta có $AB+AC\geq BC$ với 3 điểm A, B, C bất kỳ ở đây

$$\begin{cases}\overline{AB}=(-x-\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y)\\ \overline{AC}=(-x-\frac{z}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}z)\end{cases}$$

Hai véctơ này không thể ngược hướng (vì hoành độ cùng âm) do đó không thể xãy ra đẳng thức AB + AC > BC.

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Bài 3 Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x-1}+x-3\geq\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}\,(1)$$

Giải

Điều kiện $x\geq 1$

Xét mặt phẳng toạ độ Oxy các vectơ:

$$\begin{cases}\vec{u}=(x-3,\sqrt{x-1})\\ \vec{v}=(1,1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(x-3)^2+x-1}\\ |\vec{v}|=\sqrt{3}\\ \vec{u}.\vec{v}=\sqrt{x-1}+x-3\end{cases}$$

Suy ra bất phương trình (1) tương đương $\vec{u}.\vec{v} \geq |\vec{u}|.|\vec{v}|$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow x-3=\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+9=x-1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10=0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=5$$

Vậy x=5 là nghiệm duy nhất.

Bài 4

Chứng minh rằng: $\left|\sqrt{\cos^4 x+1}-\sqrt{\sin^4 x+1}\right| \leq |\cos 2x|, \forall x \in R$

Giải

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, các vectơ:

$$\begin{cases} \vec{a}=(\cos^2 x,1) \\ \vec{b}=(\sin^2 x,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{a}-\vec{b}=(\cos 2x,0)$$

Khi đó, từ

$$\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \leq |\vec{a}-\vec{b}|$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{\cos^4 x+1}-\sqrt{\sin^4 x+1}\right| \leq |\cos 2x| \Rightarrow (dpcm)$$

Bài 5

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=f(x)=\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+5}+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+8}$$

Giải

Trong mặt phẳng toạ độ xét các véctơ:

$$\begin{cases} \vec{a}=(1-\cos x,2) \\ \vec{b}=(2+\cos x,2) \end{cases}$$

Khi đó từ :

$$\begin{cases} \left|\vec{a}\right| = \sqrt{(1-\cos x)^2 + 2^2} = \sqrt{\cos x^2 - 2\cos x + 5} \\ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(2+\cos x)^2 + 2^2} = \sqrt{\cos x^2 + 4\cos x + 8} \\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \end{cases}$$

$\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \geq \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

<=> $y \geq 5$

Dấu "=" xảy ra (chẳng hạn) tại $x = \dfrac{2\pi}{3}$

Vậy miny=5

<u>Bài 6</u> : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$y = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2} \ (p \neq q)$$

<u>Gi ải</u>

Ta c ó $y = \sqrt{(x-p)^2 + p^2} + \sqrt{(x-q)^2 + q^2}$

Trên mp toạ độ lấy hai điểm A(p, q) : B(q,q). Bài toán trở thành: Tìm M(x,0) thuộc Ox sao cho (MA +MB) đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hai trường hợp:

- Nếu pq <0 thì A hoặc B trùng O, hoặc A,B nằm về hai phía đối với O .Khi đó (MA + MB) nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M trùng O, tức là $y_{\min} = \sqrt{2p^2 + 2q^2} = \sqrt{2}(|p| + |q|)$ đạt được khi x = 0

- Nếu pq >0 thì A, B nằm cùng phía đối với O (đồng thời nằm cùng phía đối với Ox). Lấy A' đối xứng với A qua Ox ta có A'(p, -p), đồng thời :

$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$

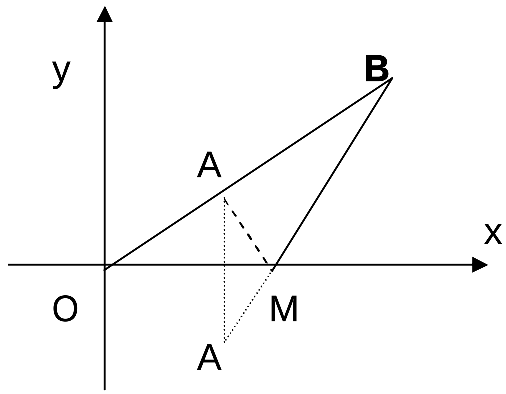
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ A', M, B thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \begin{cases} x - p = k(q-p) \\ p = k(q+p) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{p}{p+q} \\ x = \dfrac{2pq}{p+q} \end{cases}$$

$$y_{\min} = A'B = \sqrt{(p-q)^2 + (p+q)^2}$$
$$= \sqrt{2(p^2+q^2)}$$

đạt được khi x = 2pq/(p+q)



<u>Bài 7</u> Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{4x^2+12x+25}=\sqrt{9x^2+12x+29}$$

<u>Giải</u>

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét các vectơ:

$$\begin{cases}\vec{u}=(x-1,1)\\ \vec{v}=(2x+3,4)\end{cases}\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(3x+2,5)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{x^2-2x+2}\\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{4x^2+12x+25}\\ \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{9x^2+12x+29}\end{cases}$$ Suy ra phương trình (1) tương đương:

$\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} (k > 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = k(2x + 3) \\ 1 = k.4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{4} \\ x - 1 = \dfrac{1}{4}(2x + 3) \end{cases} \quad \left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{4} \\ 4x - 4 = 2x + 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình $x = \dfrac{7}{2}$ (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

<u>Bài 8</u>:Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} - \sqrt{(3 + x)(6 - x)} = m$$

<u>Giải</u>

Đặt $u = \sqrt{3 + x}$; $v = \sqrt{6 - x}$

Phương trình đã cho trở thành

-
$$\begin{cases} u + v - uv = m \\ u^2 + v^2 = 9 \\ u \ge 0, v \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 + \sqrt{10 - 2m} & (1) \\ u^2 + v^2 = 9 & (2) \\ u \ge 0, v \ge 0 & (3) \end{cases}$$

Phương trình (1) biểu thị 1 đường thẳng thay đổi song song với đường phân giác thứ hai, phương trình (2) biểu diễn 1 đường tròn có tâm tại góc toạ độ và bán kính = 3

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng (1) và đường tròn (2) có điểm chung thoả điều kiện (3).

Vậy Pt có nghiệm khi
$$3 \le 1 + \sqrt{10 - 2m} \le 3\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{2} - 9}{2} \le m \le 3$$

<u>Bài 9</u>: Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \ge 2, \forall a \in R$$

(*Hướng dẫn*)

Xét hai vectơ

$$\begin{cases} \vec{x} = \left(a + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{y} = \left(-a + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\sqrt{1+2\cos^2 x} + \sqrt{1+2\sin^2 x} = m$$

<u>Bài 10</u>: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 6\cos x + 13} + \sqrt{\cos^2 x + 2\cos x + 2}$$

trên $[2004\pi, 2006\pi]$

(*Hướng dẫn*)

Xét hai vectơ

$$\begin{cases} \vec{a} = (3 - \cos x, 2) \\ \vec{b} = (1 + \cos x, 1) \end{cases}$$

<u>CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC :</u>

<u>Bài 1</u>: Cho tam giác ABC vuông tại A, các cạnh góc vuông là bvà c, M là một điểm trên cạnh BC sao cho góc BAM = α . Chứng minh rằng:

$$\text{AM} = \frac{bc}{c.\cos\alpha + b\sin\alpha}$$

<u>Giải</u> Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ. Khi đó A(0,0) , B(b,0), C(0,c) , M9x,y)

Từ định nghĩa: x = AM cosα , y = AM sinα .

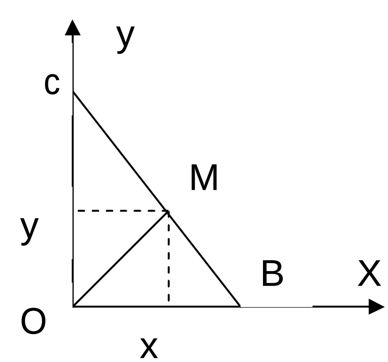
Nên M(AM cosα , AM sinα)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} AM\cos\alpha & AM\sin\alpha \\ b & -c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow AM(c\cos\alpha + b\sin\alpha) = bc$$

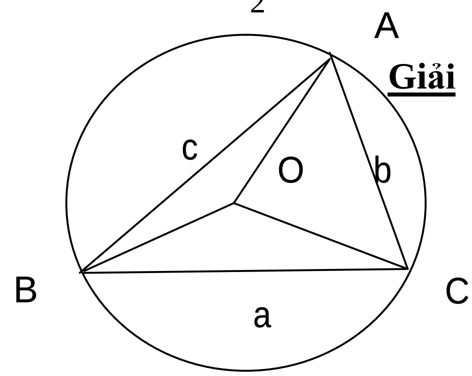
$$\Rightarrow AM = \frac{bc}{c\cos\alpha + b\sin\alpha}$$

Do M thuộc BC $\Rightarrow$ $\overrightarrow{CM}$ cùng phương với $\overrightarrow{CB}$



<u>Bài 2</u>: Cho tam giác ABC có độ dài các trung tuyến và độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp lần lượt là $m_{a,} m_{b,} m_{c,} R$

Chứng minh: $m_a + m_b + m_c \le \dfrac{9R}{2}$



Giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.Ta có:

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 3 + 2(3 - 2\sin^2 A - 2\sin^2 B - 2\sin^2 C) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$$

Do đó theo bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$m_a + m_b + m_c \le \sqrt{3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)} \le \sqrt{\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2)}$$
$$\le \sqrt{9(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).R^2}$$
$$\le \sqrt{9.\frac{9}{4}.R^2} \le \frac{9}{2}.R$$
$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$$

Dấu”=” xảy ra khi tam giác ABC đều.

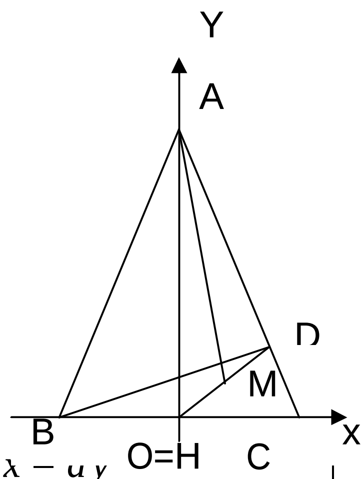
Bài 3:

Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên AC , M là trung điểm của HD. Chứng minh AM vuông góc BD.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ

Khi đó: H(0,0), A(0,a), B(-c,0), D(x,y)



Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD}\, cung\ phuong\, \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)(c,-a)=0 \\ \begin{vmatrix} x & y-a \\ c & -a \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cx - ay = 0 \\ ax + cy = ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2c}{a^2+c^2} \\ y = \dfrac{c^2a}{a^2+c^2} \end{cases}$$

$$D\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}, \frac{c^2a}{a^2+c^2}\right)$$

Vậy , M là trung điểm của HD nên:

$$M\left(\frac{a^2c}{2(a^2+c^2)}, \frac{c^2a}{2(a^2+c^2)}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2a^2c+c^3}{a^2+c^2}, \frac{c^2a}{a^2+c^2}\right)\left(\frac{a^2c}{2(a^2+c^2)}, \frac{-c^2a-2a^3}{2(a^2+c^2)}\right)$$

$$= \frac{2a^4c^2+a^2c^4}{2(a^2+c^2)} + \frac{-c^4a^2-2a^4c^2}{2(a^2+c^2)} = 0$$

Vậy BD vuông góc AM (đpcm)

<u>Bài 4</u>

Điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Chứng minh giá trị của $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

<u>Giải</u>

Gọi I,R là tâm và bán kính của đường tròn (c) ngoại tiếp tam giác đều ABC. Dựng hệ trục như hình vẽ, ta có

$$M(x,y) \in (C) \Rightarrow MI = R$$
$$\Rightarrow MI^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2Rx$$

$$A(0,0); B\left(\frac{3R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right); C\left(\frac{3R}{2}, \frac{-R\sqrt{3}}{2}\right); I(R,0)$$

Ta có

$$MA^4 + MB^4MC^4 = (x^2+y^2)^2 + \left[(x-\frac{3R}{2})^2 + (y-\frac{R\sqrt{3}}{2})^2\right]^2$$

$$+\left[(x-\frac{3R}{2})^2 + (y+\frac{R\sqrt{3}}{2})^2\right]^2$$

$$= (2Rx)^2 + (3R^2 - Rx - R\sqrt{3}y)^2 + (3R^2 - Rx + R\sqrt{3}y)^2$$

$$= 6R^2x + 6R^2y^2 + 18R^4 - 12R^3x$$

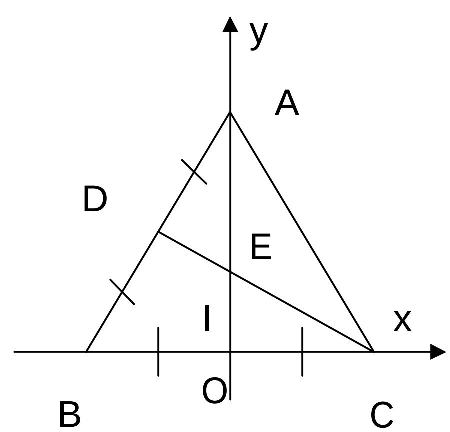
$$= 6R^2(x^2+y^2) + 18R^4 - 12R^3x$$

$$= 6R^2 2Rx + 18R^4 - 12R^3x = 18R^4$$

Vậy giá trị $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí M

<u>Bài 5</u> Cho tam giác ABC cân tại A. D là trung điểm cạnh AB, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, E là trọng tâm của tam giác ACD. Chứng minh IE vuông góc CD.

<u>Gi ải</u>



Chọn hệ trục như hình vẽ (O là trung điểm của BC)

Khi đó : O(0,0); A(0,a); B(-c,0); C(c,0); D(-c/2, a/2); E(c/6,a/2),(a,c>0)

Gọi I(x, y)

Giả thiết $\begin{cases} \overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\frac{c}{2}, y-\frac{a}{2}).(c,a)=0 \\ (x,y).(2c,o)=0 \end{cases}$ suy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{a^2-c^2}{2a} \end{cases}$$

Vậy $I(0,\frac{a^2-c^2}{2a})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{DC} = (\frac{c}{6},\frac{c^2}{2a})(\frac{3c}{2},-\frac{a}{2}) = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow IE \perp DC(dpcm)$$

IV. CÁC BÀI TOÁN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN .

1. CÁC BÀI ĐẠI SỐ:

Bài 1:Giải hệ phương trình

Giải

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

Xét hai véc tơ $\vec{u}=(x_0,y_0,z_0)$; $\vec{v}=(x_0{}^2,y_0{}^2,z_0{}^2)$ trong đó $\vec{u}=(x_0,y_0,z_0)$ Là nghiệm tuỳ ý (nếu có) của hệ đã cho.

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=x_0^3+y_0^3+z_0^3=1$

Ngoài ra tính được $|\vec{u}|=1$; $|\vec{v}|=\sqrt{1-2(x_0^2y_0^2+y_0^2z_0^2+z_0^2x_0^2} \le 1$

Vậy $|\vec{u}|.|\vec{v}| \le 1 = \vec{u}.\vec{v}$

Dođó $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0y_0=1 \\ y_0z_0=1 \\ z_0x_0=1 \\ x_0+y_0+z_0=1 \end{cases}$

Từ đó suy ra $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \\ z_0=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=1 \\ z_0=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \\ z_0=1 \end{cases}$

Thử lại ta được hệ đã cho có 3 nghiệm (1,0,0) ; (0,1,0) : (0,0 ,1)

Bài 2 : Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x} \le 12$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -1 \\ x \ge \dfrac{3}{2} \\ x \le \dfrac{50}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{50}{3}$

Trong mặt phẳng
Oxy xét các vectơ:

$$\begin{cases} \vec{u} = (1,1,1) \\ \vec{v} = (\sqrt{x+1}, \sqrt{2x-3}, \sqrt{50-3x}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{u}\right| = \sqrt{3} \\ \left|\vec{u}\right| = \sqrt{x+1+2x-3+50-3x} = \sqrt{48} = 4.\sqrt{3} \\ \vec{u}.\vec{v} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \end{cases}$$

Suy ra(1) $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$

Đẳng thức này luôn đúng

Vậy nghiệm bất phương trình đã cho là: $\frac{3}{2} \le x \le \frac{50}{3}$

Bài 3

Giải hệ: $$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3(1) \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Giải

Xét trong Không gian Oxyz các vectơ: $$\begin{cases} \vec{u} = (x,y,z) \\ \vec{v} = (1,1,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{u}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{3} \\ \left|\vec{u}\right| = \sqrt{3} \\ \vec{u}.\vec{v} = x+y+z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$$

$$\Rightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \ge 0$$

$$\Rightarrow x = y = z = 1$$

(Thoả (1) Vậy: x=y=z=1 là nghiệm duy nhất của hệ (1).

Bài 4 : Cho a, b là hai số thực tuỳ ý. Chứng minh rằng

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2}$$

Giải

Trong không gian với hệ trục toạ độ Đề - các vuông góc Oxyz, đặt

$$\begin{cases} \vec{u} = (1, a, 0) \\ \vec{v} = (1, -b, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{|1-ab|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \\ \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \end{cases}$$

Ta có $\left|\sin 2(\vec{u}, \vec{v})\right| = \left|2\sin(\vec{u}, \vec{v}).\cos(\vec{u}, \vec{v})\right| = \left|\dfrac{2(1-ab)(a+b)}{(1+a^2)(1+b^2)} \le 1\right|$

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow$

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

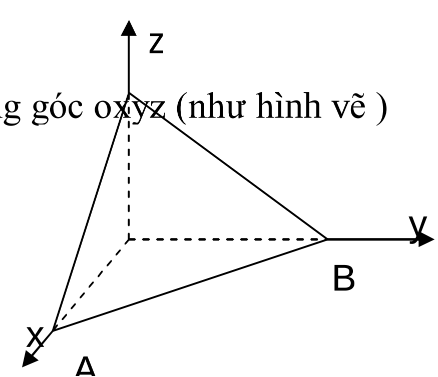
Bài 1 Cho tam diện oxyz. A, B, C lần lượt là các điểm di động trên ox, oy, oz sao cho:

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{2005}$$

Chứng minh rằng: (ABC)luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ vuông góc oxyz (như hình vẽ)



Sao cho: A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)(với OA=a,OB=b,OC=c)
Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Hơn nữa: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2005}$ (Do giả thiết)

$\Rightarrow M(2005,2005,2005)\in mp(ABC)$

=>mp(ABC)luôn đi qua điểm cố định

M(2005,2005,2005).

<u>Bài 2</u>:Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với AB = a, BC = b, AA' = c.

a/ Tính diện tích của tam giác ACD' theo a, b, c

b/ Giả sử M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Hãy tính thể tích của tứ diện D'DMN theo a, b, c.

<u>Giải</u>

a/ Ta lập hệ trục toạ độ vuông góc có gốc trùng với đỉnh A, các trục có phương trùng với $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AA'}$ Khi đó : A(0,0,0) , C(a,b,0) , D'(0,b,c).

$$\overrightarrow{AC}=(a,b,0);\overrightarrow{AD}'=(0,b,c);[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=(bc,-ca,ab)$$

$$S_{\triangle ACD'}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

b/ Dễ dàng tính được

$$S_{\triangle DMN}=\frac{3ab}{8}$$

$$\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}S_{\triangle DMN}DD'=\frac{abc}{8}$$

<u>Bài 3</u>:Cho hai nửa mp (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến (d). Trên (d) lấy AB = a (a là độ dài cho trước). Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với (d) và ở trong (Q) lấy điểm N sao cho

BN = $\frac{a^2}{b^2}$

a/ Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMN) theo a, b.

b/ Tính MN theo a , b. Với giá trị nào của b thì MN có độ dài cực tiểu. Tính độ dài cực tiểu đó.

Giải

a/ Chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho A trùng với gốc toạ độ (A(0,0,0)): B có toạ độ (0,a,0); N có toạ độ($\frac{a^2}{b},a,0$). Ta có

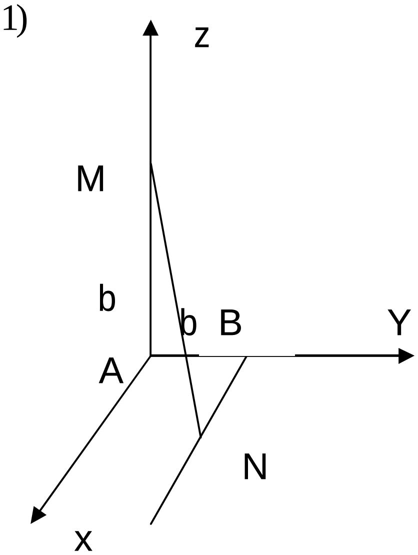
$$\overrightarrow{BM}=(0,a,b)$$

$$\overrightarrow{BN}=(\frac{a^2}{b},0,0)$$

$$[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}]=(\begin{vmatrix}-a & b\\ 0 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b & 0\\ 0 & \frac{a^2}{b}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-a & b\\ \frac{a^2}{b} & 0\end{vmatrix})=(0,a^2,-a^2)$$

$$=a^2(0,1,-1)$$

Do đó mp(BMN) qua B(0,a,0) và có VTPT là $\vec{v}=(0,1,-1)$



Phương trình của mặt phẳng này là:

(y – a).1 – (z – 0) = 0

hay y – z - a = 0

Khoảng cách từ A(0,0,0,) đến mặt phẳng đó là :

$$\frac{|a|}{\sqrt{1+1}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

b/ Ta có $\overrightarrow{MN}=(\frac{a^2}{b},a,-b)\Rightarrow MN=\sqrt{\frac{a^4}{b^4}+a^2+b^2}$

$MN\geq\sqrt{a^2+2a^2}$ (bất đẳng thức Côsi)

MN có độ dài cực tiểu $a\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{a^4}{b^2}=b^2\Leftrightarrow b=a$

$$MinMN=a\sqrt{3}\ khi\ b=a$$

<u>Bài 4:</u> Cho một góc tam diện ba mặt vuông góc Oxyz. Lấy lần lượt trên Ox, Oy,Oz các điểm P, Q, R khác điểm O. Gọi A, B, C lần lượt là trung điểm của PQ, QR, RP. Chứng minh rằng nếu góc nhị diện cạnh OA của tứ` diện OABC là góc nhị diện vuông thì hai góc B và C của tam giác ABC thoả hệ thức tgB.tgC = 2.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Đề-Các vuông góc Oxyz sao cho P(2a,0,0) ; Q(0,2b,0) ;R(0,0,2c). Khi đó:

A(a,b,0) ; B(0,b,c) ; C(a,0,c)

Pháp véc tơ của mặt phẳng (OAB) và (OAC) lần lượt là:

$$\overrightarrow{n_1} = (bc, -ac, ab)$$
$$\overrightarrow{n_2} = (bc, -ac, -ab)$$

Góc nhị diện cạnh OA vuông khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 = a^2b^2$$

Trong tam giác ABC ta có:

$$tgB = \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{a^2}$$
$$tgC = \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{b^2}$$

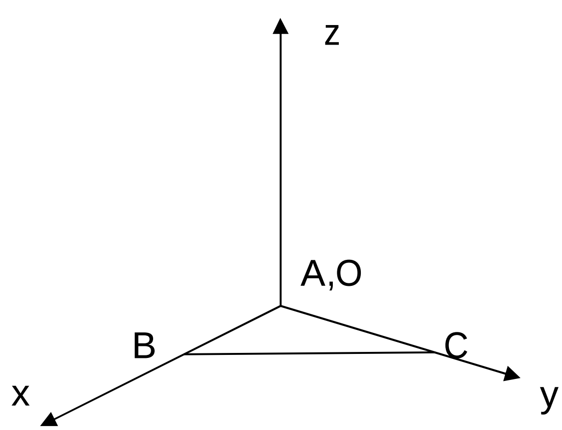
Vậy

$$tgB.tgC = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{2a^2b^2}{a^2b^2} = 2(dpcm)$$

Bài 5: Cho tam giác vuông goc ở A.tìm quỹ tích các điểm M trong không gian thoả mãn :

$$MB^2 + MC^2 \le MA^2$$

Giải



Chọn hệ trục toạ độ Đề các Oxyz sao cho A trùng O, B(b,0,.0),C(0,c,0)
(Với AB =b>0,AC=c>0)

Khi đó M(x, y, z) thoả :

$$MB^2 + MC^2 \le MA^2$$

$$\Leftrightarrow (x-b)^2 + y^2 + z^2 + (y-c)^2 + z^2 \le x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow (x-b)^2 + (y-c)^2 + z^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ y = c \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M(b,c,0)$$

Vậy quỹ tích cần tìm chỉ có một điểm duy nhất M(b,c,0)

C. KẾT LUẬN

Trên đây là một số bài toán đại số và hình học trong mặt phẳng cũng như trong không gian. Nếu khéo léo chọn hệ trục toạ độ phù hợp, vận dụng phương pháp vectơ và toạ độ thì có thể chuyển thành bài toán đại số hoặc giải tích và tìm ra lời giải ngắn gọn, phần nào làm sáng tỏ vấn đề mà tôi đưa ra. Trong quá trình viết, do thời gian và kinh nghiệm giảng dạy có hạn nên chắc không tránh khỏi nhiều thiếu sót, mong các thầy cô góp ý. Tôi xin chân thành cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

1. SGK, sách bài tập toán lớp 10, 11, 12
2. Các loại sách tham khảo, bồi dưỡng toán học sinh về sử dụng phương pháp vectơ và tọa độ trong giải toán
3. Bài tập trong các đề thi
4. Khóa luận cùng đề tài
5. Tài liệu trên các trang web