

Tích Vô Hướng Của Hai Vectơ

A. Các kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Lưu ý:

- Với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

2. Tính chất

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (tính chất giao hoán);} \\ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ (tính chất phân phối);} \\ (k\vec{a}) \cdot \vec{b} &= k(\vec{a} \cdot \vec{b}); \\ \vec{a}^2 &\geq 0; \\ \vec{a}^2 = 0 &\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}; \\ (\vec{a} + \vec{b})^2 &= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \\ (\vec{a} - \vec{b})^2 &= \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \\ (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a}^2 - \vec{b}^2. \end{aligned}$$

B. Bài tập

Vấn đề 1: Xác định góc giữa hai vectơ

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$, hãy xác định góc giữa các vectơ sau:

- (\vec{AB}, \vec{AD}) ;
- (\vec{AB}, \vec{AC}) ;
- (\vec{AC}, \vec{BD}) ;
- (\vec{AD}, \vec{AC}) .

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^\circ$, tính các góc sau:

- (\vec{BA}, \vec{BC}) ;
- (\vec{AB}, \vec{BC}) ;
- (\vec{CA}, \vec{CB}) ;
- (\vec{AC}, \vec{BC}) ;
- (\vec{AC}, \vec{CB}) ;
- (\vec{AC}, \vec{BA})

Bài 3. Cho tam giác đều ABC cạnh a và trọng tâm G , tính các góc sau

- (\vec{AB}, \vec{AC}) ;
- (\vec{AC}, \vec{CB}) ;
- (\vec{AG}, \vec{AB}) ;
- (\vec{GB}, \vec{GC}) ;
- (\vec{BG}, \vec{GA}) ;
- (\vec{GA}, \vec{BC}) .

Bài 4. Cho tam giác ABC có $A = 45^\circ, B = 60^\circ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, tính các góc sau:

- a. (\vec{OA}, \vec{OB}) ; c. (\vec{OB}, \vec{OA}) ;
 b. (\vec{OC}, \vec{OA}) ; d. (\vec{BC}, \vec{BC}) .

Bài 5. Cho $ABCDEF$ là một hình lục giác đều tâm O , tính các góc sau:

- a. (\vec{AB}, \vec{ED}) ; c. (\vec{OA}, \vec{CO}) ; e. (\vec{AB}, \vec{CD}) ;
 b. (\vec{AD}, \vec{CD}) ; d. (\vec{AB}, \vec{CA}) ; f. (\vec{AD}, \vec{AE}) .

Vấn đề 2: Tính tích vô hướng của hai vectơ

Phương pháp

- Sử dụng định nghĩa: Đưa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} cùng gốc để xác định góc (\vec{a}, \vec{b}) , rồi tính $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các hằng đẳng thức vectơ. Thường phối hợp với phương pháp sử dụng định nghĩa.
- Biết tích vô hướng, ta có thể tính độ dài và góc của hai vectơ. Để tính độ dài đoạn AB , ta thường viết :
 $AB^2 = \vec{AB}^2$, nhờ thế có thể phân tích thành tổng bình phương hay hiệu bình phương hai vectơ, và biến phép tính cạnh thành phép tính tích vô hướng.
 VD: $AB^2 = \vec{AB}^2 = (\vec{CA} - \vec{CB})^2 = CA^2 - CB^2 - 2\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \dots$

Bài 6. Tính tích vô hướng của \vec{a}, \vec{b} biết $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ và góc giữa chúng:

- a. 2; 3; 60° ; c. $8; \frac{3}{2}; 120^\circ$; e. 17; 23; 90° ;
 b. $\sqrt{2}; \sqrt{8}; 45^\circ$; d. $\frac{5}{2}; 4; 150^\circ$; f. $12; \frac{1}{6}; 180^\circ$.

Bài 7. Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng, $OA = a, OB = b$, tính tích $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ trong hai trường hợp

- a. A, B cùng phía với O ; b. A, B khác phía với O ;

Bài 8. Cho tam giác ABC có $A = 45^\circ, B = 60^\circ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, tính các góc sau

- a. $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$; c. $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$; e. \vec{AC}^2 .
 b. $\vec{OC} \cdot \vec{OA}$; d. \vec{BC}^2 ;

Bài 9. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O cạnh a . Tính các tích vô hướng sau

- a. $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$; d. $\vec{OA} \cdot \vec{CO}$; g. $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$;
 b. $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$; e. $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$; h. $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$;
 c. $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$; f. \vec{AB}^2 ; i. $\vec{EB} \cdot \vec{AD}$.

Bài 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O . Tính các tích vô hướng

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; c. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$; e. \overrightarrow{BC}^2 ;
b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; d. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$; f. \overrightarrow{OC}^2 .

Bài 11. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi M, N là các điểm thỏa mãn điều kiện $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Tính

- a. $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM}$; c. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB}$;
b. $|\overrightarrow{MN}|$; d. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O . M là trung điểm của AB , gọi N là một điểm xác định bởi $2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, tính

- a. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DB}$; c. $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AD}$;
b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MC}$; d. $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$;
e. $\overrightarrow{CD} \cdot (3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD})$

Bài 13. Cho tam giác ABC cạnh a tâm O . Tính các tích vô hướng sau:

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; c. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$; e. \overrightarrow{OA}^2 ;
b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; d. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$; f. \overrightarrow{AC}^2 .

Bài 14. Cho tam giác cân ABC với $AB = AC = a$. Góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt ở trên AB, AC sao cho $AM = \frac{a}{3}$, $AN = \frac{3a}{4}$ và I là trung điểm của BC . Tính các tích vô hướng

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; g. \overrightarrow{AI}^2 ;
b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; e. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CB}$; h. \overrightarrow{CB}^2 ;
c. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$; f. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN}$; i. \overrightarrow{AC}^2 .

Bài 15. Tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9, CB = 5$.

- a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; suy ra giá trị của góc A
b. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$;
c. Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Bài 16. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Tính

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$; c. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Bài 17. (*) Tam giác ABC có $AB = 6cm, AC = 8cm, BC = 11cm$

- a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;
b. Trên AB lấy điểm M sao cho $AM = 2cm$; trên AC lấy điểm N sao cho $AN = 4cm$.
Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$

Bài 18. (*) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$.

- Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ theo a, b, c . từ đó suy ra $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$;
- Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , tính độ dài AG và cosin của góc nhọn hợp bởi AG và BC .

Bài 19. (*) Tam giác ABC cạnh a đường cao AH . Tính các tích vô hướng sau

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}, (2\vec{AB}), (3\vec{HC} = \vec{0}),$;
- $(\vec{AB} - \vec{AC})(2\vec{AB} + \vec{BC})$;

Bài 20. (*) Cho tam giác ABC có $AB = 7, AC = 5, \hat{A} = 120^\circ$.

- Tính các tích vô hướng sau $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ và $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$;
- Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác (M là trung điểm của BC).

Bài 21. (*) Cho tam giác ABC có $AB = 2, BC = 4, CA = 3$.

- Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ suy ra $\cos A$;
- Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , tính $\vec{AG} \cdot \vec{BC}$;
- Tính $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$;
- Gọi D là chân đường phân giác trong của góc \hat{A} . Tính \vec{AD} theo \vec{AB}, \vec{AC} từ đó suy ra độ dài đoạn AD .

Vấn đề 3: Chứng minh một đẳng thức về tích vô hướng hay về độ dài

Phương pháp

- Sử dụng các quy tắc về phép tính như đã trình bày ở vấn đề 1
- Về độ dài, cần chú ý rằng : $AB^2 = \vec{AB}^2 =$ với O là điểm tùy ý, chú ý các điểm có vai trò như điểm O .

Bài 22. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng với điểm M tùy ý ta có

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = 0$$

Bài 23. Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = OM^2 - OA^2$.

Bài 24. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến là AD, BE, CF . Chứng minh rằng $\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BE} + \vec{AB} \cdot \vec{CF} = 0$.

Bài 25. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $\vec{MH} \cdot \vec{MA} = \frac{1}{4} \vec{BC}^2$.

Bài 26. Cho tứ giác $ABCD$.

- Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 2\vec{CA} \cdot \vec{BD}$;

- b. Từ câu a., hãy chứng minh rằng: Điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc là tổng bình phương các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

Bài 27. Cho đoạn thẳng AB có độ dài $2a$ và số k^2 . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k^2$.

Bài 28. Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Gọi B' là hình chiếu của B trên đường thẳng OA . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}$$

trong hai trường hợp: góc $\widehat{AOB} < 90^\circ$ và $\widehat{AOB} \geq 90^\circ$.

Công thức hình chiếu: Gọi vectơ $\overrightarrow{OB'}$ là *hình chiếu* của vectơ \overrightarrow{OB} trên đường thẳng OA . Công thức $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}$ gọi là *công thức hình chiếu*.

Bài 29. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định. Một đường thẳng Δ thay đổi, luôn đi qua M , cắt đường tròn đó tại hai điểm A, B .

Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB}$ từ đó chứng minh

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2.$$

Bài 30. Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao $AB = 2a$, đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = 2a$.

- Dựa vào công thức hình chiếu, hãy chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$;
- Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$;
- Gọi I là trung điểm của CD , tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD}$. Suy ra góc của AI và BD .