PP GIẢI BÀI TẬP TÍCH VÔ HƯỚNG

I.Lý thuyết :

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I .Góc giữa hai vectơ : ***Định nghĩa:*** Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (khác $\vec{0}$). Từ điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^0 đến 180^0 gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

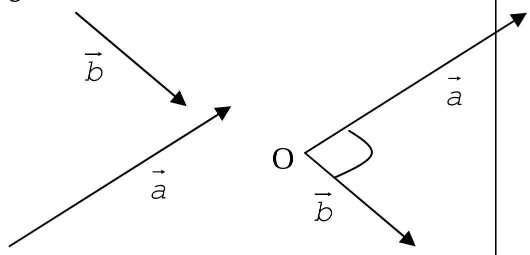
KH : $(\vec{a}, \vec{b})$ hay $(\vec{b}, \vec{a})$

Đặc biệt : Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ thì

ta nói $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc nhau . ***KH***: $\vec{a} \perp \vec{b}$ hay $\vec{b} \perp \vec{a}$

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^0$ thì $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^0$ thì $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



I. Định nghĩa:

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một ***số*** kí hiệu: $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.Cos(\vec{a}, \vec{b})}$$

Chú ý:

* $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

* $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \vec{a}^2$

$\vec{a}^2$ gọi là bình phương vô hướng của vec $\vec{a}$.

* *$\vec{a}.\vec{b}$ âm hay dương phụ thuộc vào $Cos(\vec{a}, \vec{b})$*

2) Các tính chất :

Với 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kỳ. Với mọi số k ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

$(k.\vec{a}).\vec{b} = k.(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k.\vec{b})$

* $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

* ***Nhận xét*** :

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \overrightarrow{a^2} + 2\vec{a}.\vec{b} + \overrightarrow{b^2}$

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \overrightarrow{a^2} + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$

$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \overrightarrow{a^2} - \overrightarrow{b^2}$

III . Biểu thức tọa độ của tích vô hướng :

Cho 2 vectơ $\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$

Ta có :

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2}$$

Nhận xét : $\vec{a}.\vec{b} = 0$ khi và chỉ khi $a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)

IV . Ứng dụng :

Cho $\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$

a) Độ dài vectơ :

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2}$$

b) Góc giữa hai vectơ :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}.\sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}}}$$

II,DẠNG **BÀI TẬP CƠ BẢN**

Bài 1: Tính tích vô hướng của 2 vecto.

Phương pháp:

-Tính $\left|\vec{a}\right|;\left|\vec{a}\right|$ và góc tạo bởi 2 vecto $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$

-Áp dụng công thức $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$

Thí dụ :

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có AB =AC = a . Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$

GIẢI

$AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \quad \overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA.CB\cos 45^0 \; -a^2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=-a^2$

BÀI TẬP

1.Cho hình vuông ABCD có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ĐS: 0 ; a^2

2.Cho tam giác ABC vuông tại C có AC = 9 và BC = 5. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ĐS:81

3.Cho tam giác ABC có AB=2 BC = 4 và CA = 3.

a.Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ suy ra cos A b.Gọi G là trọng tâm tam giác . Tính $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$

c.Tính $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}.+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

d.Gọi D là giao điểm phân giác trong của góc A với BC . Tính AD theo $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ rồi suy ra AD

HD:

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ bình phương 2 vế : ĐS : $-\frac{3}{2}$ $\cos A=-\frac{1}{4}$

b.$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$ ĐS : $\frac{5}{3}$

c.ĐS: $-\frac{29}{6}$ $AD=\frac{3\sqrt{6}}{5}$

Bài 2:Chưng minh một đẳng thức vec tơ có lien quan đến tích vô hướng hay đẳng thức các độ dài .

Phương pháp :

-Ta sử dụng các phép toán về vec tơ và các tính chất của tích vô hướng .

-Về độ dài ta chú ý :$AB^2=\overrightarrow{AB}^2$

Thí dụ1 : Cho tam giác ABC . và M là một điểm bất kỳ .

1.Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$

2.Gọi G là trọng tâm tam giác chứng minh $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

3.Suy ra $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ với a ; b ;c là độ dài 3 cạnh của tam giác

Chưng minh

$$VT = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) =$$

$$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$$

$$2.MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$$

$$=> VT = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}\right)$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) == 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$3.M \equiv A => AB^2 + AC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$M \equiv B => BA^2 + BC^2 = 4GB^2 + GA^2 + GC^2$$

$$M \equiv C => CB^2 + AC^2 = 4GC^2 + GB^2 + GA^2$$

$$=> 6\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) = 2(a^2 + b^2 + c^2) => GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

BÀI TẬP:
www.MATHVN.com

1.Cho 2 điểm cố định A và B và M là một điểm bất kỳ .H là hình chiếu của M lên AB và I là trung điểm của AB.Chứng minh rằng :

$a)\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$ $\quad$ $b)MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$ $\quad$ $c)MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB}.\overline{IH}$

2.Cho tứ giác ABCD .

a.Chứng minh rằng $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

b. Chưng minh điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD có 2 đường chéo vuông góc là :$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$

3.Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh huyền BC = a√3 .Gọi M là trung điểm của BC biết

$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC} = \dfrac{a^2}{2}$ .Tính AB và AC $\quad$ $ĐS : AB = a\sqrt{2} \quad AC = a$

4.Cho nữa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R .Gọi M và N là 2 điểm thuộc nữa đương tròn và AM và BN cắt nhau tại I.

a.Chưng minh $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$ $\quad ;\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$

:b,Từ đó tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN}$ theo R

5.Cho tam giác ABC có trực tâm H và M là trung điểm BC Chứng minh $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \dfrac{BC^2}{4}$

6.Cho tứ giác ABCD có 2 đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M và P là trung điểm của AD .
Chứng minh $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{BC} <=> \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

Bài 3: Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A($x_1;y_1$) B($x_2;y_2$) và C($x_3;y_3$) .Xác định hình dạng của tam giác ABC.

Phương pháp :

$- \text{Tính } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad CA = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$

–Nêu AB = BC = CA =>Tam giác ABC đều .

–Nếu AB = AC =>Tam giác ABC cân
–Nếu AB = AC và BC = AB√2 => Tam giác ABC vuông cân tại B
–Nếu $BC^2=AB^2+AC^2$ =>tam giác ABC vuông tại A

Thí dụ 1:
TRong mpOxy cho tam giác ABC với A(1;5) B(3;–1) C(6;0).Xác định hình dạng của tam giác ABC . Tính diện tích tam giác ABC.
GIẢI :

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{40}\qquad BC=\sqrt{(6-3)^2+(0+1)^2}=\sqrt{10}\quad CA=\sqrt{(1-6)^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}$$

$$CA^2=50\ ;AB^2+BC^2=40+10=50 \Rightarrow CA^2=AB^2+BC^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } B$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}BA.BC=10\text{đvdt}$$

Thí dụ 2:Cho tam giác ABC với A(–1;3) B(3;5) C(2;2).Xác định hình dạng của tam giác ABC ,Tính diện tích của tam giác ABC và chiều cao kẻ từ A.

$AB=\sqrt{20}\quad BC=\sqrt{10}\ ;CA=\sqrt{10} \Rightarrow AB=\sqrt{2}.BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A
S=5đvdt

Thí dụ 3:Trong mpOxy cho A(4;0) $B\left(2;2\sqrt{3}\right)$
Chứng minh tam giac OAB đều . .Tìm trực tâm của tam giác OAB
Giải :

$$OA=4\ \ OB=4\ \ AB=\sqrt{(2-4)^2+\left(2\sqrt{3}-0\right)^2}=4$$

$$\Rightarrow OA=OB=AB=4 \Rightarrow \Delta OAB \text{ đều}$$

Trực tâm H của tam giác OAB cũng là trọng tâm tam giác OAB => $H\left(2;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Bài Tập :
www.MATHVN.com

1. Cho tam giác ABC với A(1;0) B(–2;–1) và C(0;3).Xác định hình dạng của tam giác ABC .Tìm Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
ĐS: Vuông tại A , Tâm I (–1;1)
2.Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(0;2) B(m ; 0) và C(m+3; 1) .Định m để tam giác ABC vuông tại A. ĐS:m = –1 hay m =-2
3. Cho tam giác ABC biết A(–1;3) B(–3;–2) và C(4;1) , Chứng minh tam giác ABC vuông từ đó suy ra khoảng cách từ C đến AB.
4.Ch 2 điểm A (2 ; –1) và B(–2;1) Tìm điểm M biết tung độ là 2 và tam giác ABM vuông tại C .
ĐS: M(1;2) và M(–1;2)
5.Trong mpOxy cho 2 điểm A(2;4) và B(1 ; 1) . Tìm điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B .
ĐS: C(4;0) và C(–2;2)

Bài 4: ***Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3) .Xác định trọng tâm G , trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.***
Phương pháp :

–Trọng tâm $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

Tìm trực tâm H

-Gọi H(x;y)là trực tâm của tam giác ABC

Tính $\overrightarrow{AH} = (x - x_1; y - y_1)$ Tính $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ .Tính $BH = (x - x_2; y - y_2)$;$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}$

Do H là trực tâm ⇔ $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$ Giải hệ trên tìm x ; y

Tìm tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi I(x;y) . Tính $AI^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$ $BI^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$ $CI^2=(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$

I là tâm đường tròn ngoai tiếp tam giác ABC ⇔AI = BI =CI

Giải hệ trên tìm x ; y

Thí dụ : Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(5 ;4) B(2 ;7) và C(–2 ;–1) .

a.Tìm trọng tâm G , trực tâm H và tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b.Chứng minh I ; G ;H thẳng hang.

GIẢI

a)Gọi G là trọng tâm tam giác ABC => $G\left(\frac{5+2-2}{3};\frac{4+7-1}{3}\right) = G\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$

Gọi H(x;y) là trực tâm tam giác ABC

$\overrightarrow{AH} = (x-5; y-4)$;$\overrightarrow{BC} = (-4;-8)$ $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC} = -4(x-5) - 8(y-4) = -4x - 8y + 52$

$\overrightarrow{BH} = (x-2; y-7)$;$\overrightarrow{CA} = (7;5)$ $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{CA} = 7(x-2) + 5(y-7) = 7x + 5y - 49$

H là trực tâm tam giác ABC <=> $\begin{cases} 4x + 8y = 52 \\ 7x + 5y = 49 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = \frac{14}{3} \end{cases}$ => $H\left(\frac{11}{3};\frac{14}{3}\right)$

Gọi I(x;y)là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

<=> $\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y-7)^2 \\ (x-5)^2 + (y-4)^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} -6x + 6y = 12 \\ -14x - 10y = -36 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$ => $I\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$

b, $\overrightarrow{IG} = \left(1;\frac{2}{3}\right)$ $\overrightarrow{IH} = (3;2) = 3\left(1;\frac{2}{3}\right) = 3\overrightarrow{IG}$ => I;G;H thẳng hàng

BÀI TẬP:

www.MATHVN.com

1.Cho tứ giác ABCD với A(3;4) B(4;1) C(2;–3;D(–1;6) .Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn.

HD: Tìm tâm I của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (ĐS: I(-1;1), Chứng minh IA =ID.

2.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(–1;–3) B(2;5) và C(4;0).Xác định trực tâm H của tam giác ABC.

ĐS: $\left(\frac{164}{31};-\frac{15}{31}\right)$

3.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(–1;4) B(–4;0) C(2;–2) . Tìm tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. ĐS: $I\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$

4.Trong mpOxy cho 2 điểm A(–2;–2) và B(5 ;–4) .

a)Tìm điểm C sao cho trọng tâm của tam giác ABC là điểm G(2;0)   ĐS:C(3;6)

b)Tìm tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.   ĐS $I\left(\frac{169}{66};\frac{47}{33}\right)$

5.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(0;1) B(3;2) và C(1;5) .Tìm trực tâm H của tam giác ABC .

ĐS: $H\left(\frac{21}{11};\frac{25}{11}\right)$

Bài 5: ***Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3) .Xác định tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.***

Phương Pháp:

–Tính AB ;AC; k =-AB/AC

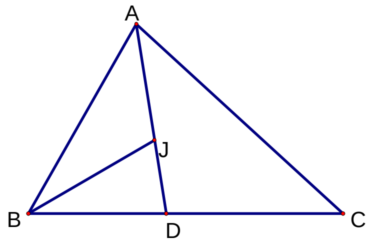
–Gọi D là giao điểm đường phân giác trong của góc A với cạnh BC

=> $\overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{DC}$ => tọa độ của D.

–Tính BA và BD =k'= –BA/BD

–Gọi J là giao điểm của 2 đường phân giác trong của góc A và góc B

=> $\overrightarrow{JA} = k'\overrightarrow{JD}$ =>tọa độ của J



Thí dụ :Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(–2;3) $B\left(\frac{1}{4};0\right)$ và C(2;0)

Tìm tâm J đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

GIẢI

$AB = \frac{15}{4}; AC = 5 \Rightarrow k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{3}{4}$

Gọi D là giao điểm phân giác trong của góc A và BC => $\overrightarrow{DB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - x = -\frac{3}{4}(2-x) \\ -y = -\frac{3}{4}(0-y)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(1;0)$$

$BA = \frac{15}{4}; BD = \frac{3}{4} \Rightarrow k' = -5$

Gọi J là giao điểm phân giác trong của góc B và AD => $\overrightarrow{JA} = -5\overrightarrow{JD}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 - x = -5(1-x) \\ 3 - y = -5(0-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Bài tập:

www.MATHVN.com

1.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(2;6) B(–3;–4) và C(5;0)

a.Chứng minh tam giác ABC vuông .

b.Tìm tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. ĐS : J(2;1)

2. Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(1;5) B(–4;–5) và C(4;-1).Tìm tâm J của đương tròn nội tiếp tam giác ABC . ĐS J(1;0)

3. Trong mpOxy cho tam giác ABC với $A\left(\frac{-15}{2};2\right)$ B(12;15) C(0;–3) Tìm tâm J của đương tròn nội tiếp tam giác ABC . ĐS J(-1;2)

Bài 6: ***Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3).Gọi A' là chân đường vuông góc kẻ từ A lên BC.Tìm A'***

Phương pháp:

Gọi A'(x;y).

$-$ Tính $\overrightarrow{AA'} = (x - x_1; y - y_1)$; $\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2; y_3 - y_2)$ $\overrightarrow{BA'} = (x - x_2; y - y_2)$

$$-\text{Giải hệ } \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} = t\overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - x_1)(x_3 - x_2) + (y - y_1)(y - y_3) = 0 \\ x - x_2 = t(x_3 - x_2) \\ y - y_2 = t(y_3 - y_2) \end{cases}$$

Tìm x ; y theo t , Thay vào (1) tìm t từ đó => x và y

Thí dụ :Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(1 ; 5) B(3;–1) C(6;0).Tìm chân đường cao B' kẻ từ B lên CA.

GIẢI:

Gọi B'(x; y) : $\overrightarrow{BB'} = (x - 3; y + 1)$ $\overrightarrow{CA} = (-5;5)$ $\overrightarrow{AB'} = (x - 1; y - 5)$

$$\text{B' là chân đường cao kẻ từ B lên AC} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CA} = 0 \\ \overrightarrow{AB'} = t\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5(x - 3) + 5(y + 1) = 0 \\ x - 1 = -5t \\ y - 5 = 5t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 5 + 5t \\ -x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{5} \\ x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B'(5;1)$$

BÀI TẬP:

1.Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(3;–1) B(1;5) và C(6;0) . Gọi A' là chân đường cao kẻ từ A lên BC tìm A' . ĐS:A'(5;1)

2.Trong mpOxy cho 2 điểm A(2;1) B(–2;4) . Gọi H là hình chiếu của O lên AB . Tìm H . ĐS:$H\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$

3.Trong mpOxy cho tam giác BAC với A(3;–4) B(–4;–2) và C(1;3) .Tìm chân đường cao A' của đường cao kẻ từ A lên BC. ĐS:A'$\left(-\frac{37}{53};-\frac{156}{53}\right)$

Bài 7

Trong mp Oxy cho tam giác ABC với A(x_1;y_1) B(x_2;y_2) và C(x_3;y_3),Tính cosA.

Phương pháp :

$-$ Tính $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $-$ Tính AB và AC; Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$-\text{CosA} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$$

Thí dụ : Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(0;3) B(2;2) và C(–6;1).Tínhsố đo của góc A.

$\overrightarrow{AB} = (2;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{5}$ $\quad \overrightarrow{AC} = (-6;-2) \Rightarrow AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -12 + 2 = -10$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{-10}{2.\sqrt{10}.\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = 135^0$$

****

BÀI TẬP TÍCH VÔ HƯỚNG

1.Cho hai vectơ $\overline{a}$ và $\overline{b}$. Chứng minh rằng :

$$\overline{a}\,.\,\overline{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$$

2.Cho hai vectơ $\overline{a}$, $\overline{b}$ có $\left|\overline{a}\right| = 5$, $\left|\overline{b}\right| = 12$ và $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 13$.Tính tích vô hướng $\overline{a}.(\overline{a} + \overline{b})$ và suy ra góc giữa hai vectơ $\overline{a}$ và $\overline{a} + \overline{b}$

3.Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi H là trung điểm BC,tính

a) $\overline{AH}\,.\,\overline{BC}$ b) $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$ c) $\overline{AC}\,.\,\overline{CB}$

4.Cho hình vuông ABCD tâm O,cạnh a.Tính:

a) $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$ b) $\overline{OA}\,.\,\overline{AC}$ c) $\overline{AC}\,.\,\overline{CB}$

5. Tam giác ABC có AC = 9 ,BC = 5 ,C = 90^o ,tính $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$

6. Tam giác ABC có AB = 5 ,AC = 4 ,A = 120^o

a)tính $\overline{AB}\,.\,\overline{BC}$ b) Gọi M là trung điểm AC tính $\overline{AC}\,.\,\overline{MA}$

7. Tam giác ABC có AB = 5 ,BC = 7 ,CA = 8

a)Tính $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$ rồi suy ra giá trị góc A

b)Tính $\overline{CA}\,.\,\overline{CB}$

c)Gọi D là điểm trên cạnh CA sao cho CD = $\frac{1}{3}$CA .Tính $\overline{CD}\,.\,\overline{CB}$

8.Cho hai vectơ $\overline{a}$ và $\overline{b}$ thỏa mãn $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$ và $(\overline{a}, \overline{b}) = 120^o$

Với giá trị nào của m thì hai vectơ $\overline{a} + m\overline{b}$ và $\overline{a} - m\overline{b}$ vuông góc nhau

9. Tam giác ABC có AB = 4 ,AC = 8 và góc A = 60^o .Trên tia AC lấy điểm M và đặt $\overline{AM} = k\overline{AC}$ .Tìm k để BM vuông góc với trung tuyến AD của tam giác ABC

10.Cho tam giác ABC cân đỉnh A, cạnh bên = a và hai trung tuyến BM, CN vuông góc nhau . Tính cosA

11. Tam giác ABC có AB = 6,AC = 8,BC = 11

a)Tính $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$

b)Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM = 2.Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho AN = 4.Tính $\overline{AM}\,.\,\overline{AN}$

12.Cho O là trung điểm AB,M là một điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng :

$\overline{MA}\,.\,\overline{MB} = OM^2 - OA^2$

13.Cho hình vuông ABCD tâm O, M là điểm thuộc cạnh BC.Tính $\overline{MA}\,.\,\overline{AB}$

và $\overline{MO} . \overline{AB}$

14.Cho tứ giác ABCD , I là trung điểm BC, chứng minh rằng :

a) $\overline{AB} . \overline{AC} = IA^2 - IB^2$

b) $\overline{AB} . \overline{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

c) $\overline{AB} . \overline{CD} = \frac{1}{2}(AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2)$

15.Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

16.Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a,b,c. Gọi G là trọng tâm,hãy tính:

a) $\overline{AB} . \overline{AC}$ b) $\overline{GA} . \overline{GB}$ c) $\overline{GA} . \overline{GB} + \overline{GB} . \overline{GC} + \overline{GC} . \overline{GA}$

d) Chứng minh rằng : $\overline{BC} . \overline{CA} + \overline{CA} . \overline{AB} + \overline{AB} . \overline{BC} = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

e)Tính AG theo a ,b ,c

17.Cho tam giác ABC có 3 đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng :

$$\overline{BC} . \overline{AD} + \overline{CA} . \overline{BE} + \overline{AB} . \overline{CF} = 0$$

18.Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R.Gọi M, N là hai điểm trên (O) và I = AM∩BN. Chứng minh rằng :

a) $\overline{AI} . \overline{AM} = \overline{AI} . \overline{AB}$

b) $\overline{BI} . \overline{BN} = \overline{BI} . \overline{BA}$

c) $\overline{AI} . \overline{AM} + \overline{BI} . \overline{BN} = 4R^2$

19.Cho 4 điểm A,B,C,D tuỳ ý

a) Chứng minh rằng : $\overline{AB} . \overline{CD} + \overline{AC} . \overline{DB} + \overline{AD} . \overline{BC} = 0$

b)Từ đó chứng minh rằng trong một tam giác,ba đường cao đồng qui

20.Cho tam giác ABC cân tại A.Gọi H là trung điểm của BC,và D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AM ⊥BD

21.Cho hình vuông ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm BC và CD. Chứng minh rằng : AN ⊥ DM

22.Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC, M và N lần lượt là trung điểm của AK và DC . Chứng minh rằng : BM ⊥ MN

23.Cho hình thang ABCD vuông tại A và B. AB = h, cạnh đáy AD = a, BC = b Tìm điều kiện giữa a ,b ,h để

a) AC ⊥ BD b) IA ⊥ IB với I là trung điểm CD

24.Cho tam giác ABC có AB = 3 ;AC = 6 và A = 45^o . Gọi L là chân đường phân giác trong của góc A

a)Tính $\overline{AB} . \overline{AC}$

b)Tính $\overline{AL}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$ $\Rightarrow$ độ dài của AL

c)M là điểm trên cạnh AC sao cho AM = x. Tìm x để AL ⊥ BM

25.Cho tam giác ABC có AB = 2a ,AC = a và A = 120^o

a) Tính BC và $\overline{BA} . \overline{BC}$

b)Gọi N là điểm trên cạnh BC sao cho BN = x. Tính $\overline{AN}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$,x

c)Tìm x để AN ⊥ BM

26.Cho tứ giác ABCD,chứng minh rằng:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\,\overline{AC} . \overline{DB}$$

27.Cho tam giác ABC có H là trực tâm và M là trung điểm của BC

Chứng minh rằng : $\overline{MH}\,.\,\overline{MA} = \frac{1}{4}BC^2$

28.Cho tứ giác ABCD. Hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H ,K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO; I và J là trung điểm của AD và BC.
Chứng minh rằng HK ⊥ IJ
28.Cho đường tròn (O;R) và hai dây cung AA' ,BB' vuông góc nhau tại S. Gọi M là trung điểm của AB.
chứng minh rằng: SM ⊥ A'B'
29.Cho tam giác ABC. Tìm quĩ tích những điểm M thoả mãn :

a) $\overline{AM}\,.\,\overline{AB} = \overline{AC}\,.\,\overline{AB}$

b) $MA^2 + \overline{MA}\,.\,\overline{MB} + \overline{MA}\,.\,\overline{MC} = 0$

c) $MA^2 = \overline{MC}\,.\,\overline{MA}$

d) $(\overline{MA} + \overline{MB}).(\overline{MA} + \overline{MC}) = 0$

e) $(\overline{MA} - \overline{MB}).(2\overline{MB} - \overline{MC}) = 0$

30.Cho điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng Δ, H là hình chiếu của A trên Δ.Với mỗi điểm M trên Δ, ta lấy điểm N trên tia AM sao cho $\overline{AN}\,.\,\overline{AM} = AH^2$. Tìm quĩ tích các điểm N

31.Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M,gọi P là trung điểm đoạn thẳng AD.

Chứng minh rằng $MP \perp BC \Leftrightarrow \overline{MA}\,.\,\overline{MC} = \overline{MB}\,.\,\overline{MD}$

32*. Xác định dạng của tam giác ABC biết rằng:

$(\overline{AB}\,.\,\overline{BC})\,\overline{CA} + (\overline{BC}\,.\,\overline{CA})\,\overline{AB} + (\overline{CA}\,.\,\overline{AB})\,\overline{BC} = \overline{0}$

33.Cho hình vuông ABCD,điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$

N là trung điểm đoạn thẳng DC,chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân
34.Cho AA' là một dây cung của đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên dây cung đó. Chứng minh rằng

$2\,\overline{MA}\,.\,\overline{MO} = MA(MA – MA')$

35.Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M sao cho các góc AMB ,BMC ,CMA đều bằng 120^o .Các đường thẳng AM ,BM ,CM cắt đường tròn (O) lần lượt tại A' ,B' ,C'. Chứng minh rằng:
MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'
36*.Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng AB , M là trung điểm cạnh CB
a)Xác định trên đường thẳng AC một điểm N sao cho tam giác MDN vuông tại D.Tính diện tích tam giác đó.
b)Xác định trên đường thẳng AC một điểm P sao cho tam giác MPD vuông tại M.Tính diện tích tam giác đó.
c) Tính cosin của góc hợp bởi hai đường thẳng MP và PD
37.Cho hình chữ nhật ABCD tâm O, M là điểm tuỳ ý,chứng minh rằng :

a) $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$

b) $\overline{MA}\,.\,\overline{MC} = \overline{MB}\,.\,\overline{MD}$

c) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

d) $MA^2 + \overline{MB}\,.\,\overline{MD} = 2\,\overline{MA}\,.\,\overline{MO}$

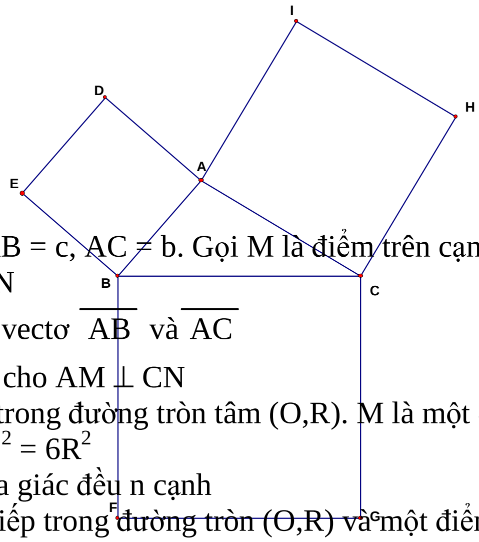
38.Cho tam giác ABC và các hình vuông ABED, ACHI ,BCGH
Chứng minh rằng :

a) $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF}).\overrightarrow{AC} = 0$

b) $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CH}).\overrightarrow{AC} = 0$

c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$

d) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$



39.Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho CM = 2BM, N là điểm trên cạnh AB sao cho BN = 2AN

a) Tính vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b)Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c sao cho AM ⊥ CN

40.a)Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm (O,R). M là một điểm tuỳ ý trên đường tròn . Chứng minh rằng: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

b) Tổng quát bài toán trên cho một đa giác đều n cạnh

41*.Cho lục giác đều $A_1A_2…A_6$ nội tiếp trong đường tròn (O,R) và một điểm M thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng :

a) $\cos M\hat{O}A_1 + \cos M\hat{O}A_2 + … + \cos M\hat{O}A_6 = 0$

b) $MA_1^2 + MA_2^2 + … + MA_6^2$ là một hằng số ($= 12R^2$)

42*.Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (O,R) ,M là một điểm bất kỳ trên đường tròn

a)Chứng minh rằng : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

b)Chứng minh rằng : $MA^2 + 2\,\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3R^2$

c)Suy ra nếu M ở trên cung nhỏ BC thì MA = MB + MC

43.Cho tam giác ABC có $A = 60^o$,AB = 6 ,AC = 8 , gọi M là trung điểm BC

a)Tính độ dài đoạn AM và độ dài đường phân giác trong của góc A

44*. Tam giác ABC có tính chất gì,biết rằng:

$$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA})\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB})\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$$

45.Cho tam giác ABC có AB = AC = 5 , góc $\widehat{BAC} = 120^o$ nội tiếp trong đường tròn tâm I. Gọi D là trung điểm AB và E là trọng tâm của tam giác ADC

a)Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b)AH là đường cao của tam giác ABC.Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

c)Chứng minh rằng IE ⊥ CD

46.Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M ,N ,P ,Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AC, BD, BC và AD. Đặt $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$

a)Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v})$; $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w})$

b)Chứng minh rằng :nếu MN = PQ thì AB ⊥ CD.Điều ngược lại có đúng không?

47.Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a ,b ,c. Gọi D là trung điểm AB và I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$

a)Chứng minh rằng BCDI là hình bình hành

b)Tính $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}$ theo a ,b ,c

c)M là một điểm tùy ý, chứng minh rằng :

$$MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 = 2MI^2 + IA^2 + 3IB^2 - 2IC^2$$

d)Khi M chạy trên đường thẳng (d) cố định,hãy tìm vị trí của M để biểu thức
$MA^2 + 3MB^2 – 2MC^2$ nhỏ nhất

48.Cho tam giác ABC và điểm M tuỳ ý

a)Chứng minh rằng vectơ $\overline{v} = \overline{MA} + 2\overline{MB} – 3\overline{MC}$ không phụ thuộc vị trí điểm M

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, chứng minh rằng :

$2MA^2 + MB^2 – 3MC^2 = 2\overline{MO}.\overline{v}$

c)Tìm quĩ tích điểm M sao cho $2MA^2 + MB^2 = 3MC^2$

49.Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(– 1;1) ,B(1;3) ,C(1;– 1)
Chứng minh rằng: tam giác ABC vuông cân tại A

50 .Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(2;4) ,B(– 3;1) ,C(3;– 1)
a)Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành
b)Kẻ đường cao AH .Tìm tọa độ chân đường cao H

51.Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm A,B,C,D với A(– 1;1) ,B(0;2) ,C(3;1) và D(0;– 2). Chứng minh rằng: tứ giác ABCD là hình thang cân

52.Trong mặt phẳng Oxy cho 3 điểm A,B,C với A(– 1;– 1) ,B(3;1) ,C(6;0)
a)Chứng minh rằng: 3 điểm A ,B ,C tạo thành một tam giác
b)Tính góc B của tam giác ABC

53.Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A,B với A(5;4) ,B(3;– 2).Một điểm M thay đổi trên trục hoành.Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overline{MA} + \overline{MB}\right|$

54.Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm A(3;4) ,B(4;1) ,C(2;– 3) ,D(– 1;6). Chứng minh rằng: tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn

55.Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm A(– 8;0) ,B(0;4) ,C(2;0) ,D(– 3;– 5). Chứng minh rằng: tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn