PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VỚI BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Hạ Vũ Anh

Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc

Tóm tắt nội dung

Trong các kỳ olimpic, bài toán hình học cổ điển luôn là một trong những bài toán hay. Cái hay của bài toán không chỉ ở độ khó của bài toán, mà còn ẩn chứa trong kết quả của bài toán, những đặc trưng, tính chất hình học được khai thác.

Về mặt nguyên tắc, bất kỳ một bài toán hình học nào cũng có thể giải được bằng phương pháp tọa độ (phương pháp đại số). Tuy nhiên, nhiều bài toán hình học giải bằng phương pháp tổng hợp thông thường lại đi đến kết quả một cách khá nhanh chóng, và đương nhiên lời giải cũng đẹp hơn nhiều. Cũng vậy, nhiều bài toán hình học được giải một cách nhanh chóng, gọn gàng, nếu sử dụng phương pháp vectơ.

Có thể nói rằng, phương pháp tọa độ là một phương pháp vạn năng, có thể giải được mọi bài toán hình học. Nhưng việc giải nhanh hay chậm, lại phụ thuộc rất nhiều vào phương pháp, kỹ năng tính toán của chúng ta, phụ thuộc vào việc chọn hệ trục tọa độ lúc ban đầu như thế nào.

Các bài toán được trình bày trong báo cáo này, đều được giải bằng phương pháp toạn độ, mặc dù cũng có thể được giải bằng phương pháp khác. Việc tiếp cận, khai thác bài toán từ nhiều hướng, nhiều khía cạnh sẽ đem lại những lợi ích lớn.

Do khuôn khổ của bài viết, trong bản báo cáo này, chúng tôi chỉ đề cập đến việc giải toán hình học phẳng trong hệ tọa độ Descartes vuông góc, chứ không nêu phương pháp giải bằng hình học afin, trong hệ tọa độ afin. Và chúng tôi cũng chỉ trình việc chọn hệ trục tọa độ như thế nào khi tiếp cận với mỗi bài toán hình học cổ điển. Việc giải toán hình học bằng công cụ tọa độ, không chỉ đơn thuần là tính toán trên các biểu thức. Điều quan trọng nhất, cần phải chọn được một hệ tọa độ thích hợp; ngoài ra, khai thác tốt các tính chất, đặc trưng hình học của bài toán sẽ giúp cho quá trình toán đơn giản, hiệu quả và nhanh gọn hơn.

36 Phương pháp tọa độ giải toán hình học phẳng

Khi đứng trước một bài toán hình học, chung ta thường xem xét, phân tích kỹ càng giả thiết, kết luận của bài toán, nhằm mục đích tìm tòi lời giải cho bài toán.

Nếu các yếu tố cho trong bài toán như giao điểm, trung điểm, tính song song, tính vuông góc... thì phương pháp tọa độ là một lựa chọn tốt để giải bài toán. Tuy nhiên, nếu trong bài toán có nhiều hơn một đường tròn, có đường phân giác hay diện tích của hình, ta cũng có thể chọn một hệ tọa độ thích hợp để giải.

Vấn đề đặt ra là hệ tọa độ đó sẽ được chọn như thế nào? Chúng ta hãy cùng tìm hiểu vấn đề này thông qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 1. Cho điểm A nằm trên đường tròn (O) và gọi (Δ) là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O). Xét điểm M trong mặt phẳng có tính chất khoảng cách từ M tới (Δ) bằng độ dài tiếp tuyến MT kẻ tới đường tròn ($T \in (O)$).

1. Tìm quỹ tích M

2. Chứng minh rằng đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

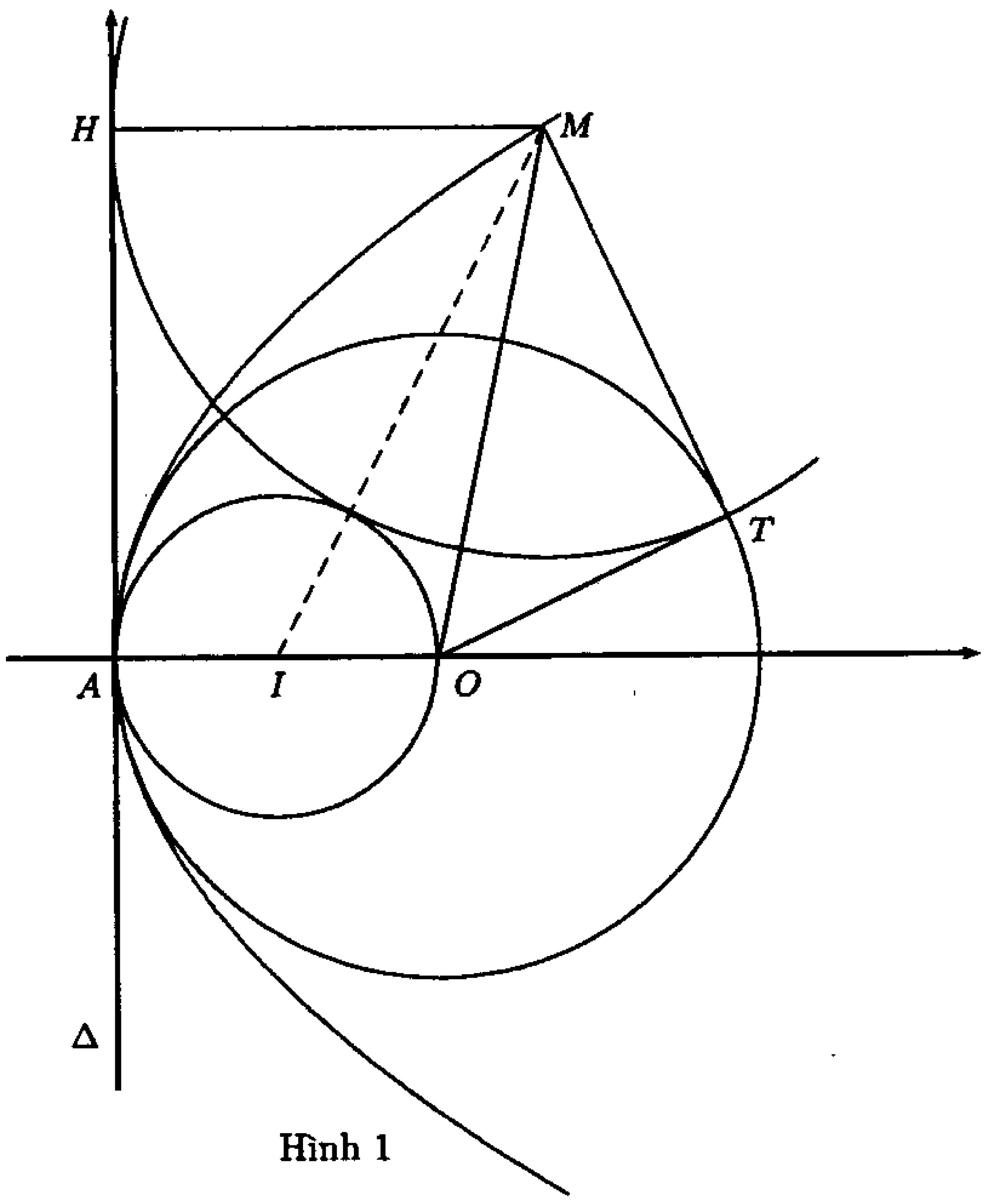
Lời giải. 1. Chọn hệ trục tọa độ Axy sao cho $A(0;0), O(R;0)$ (và do đó đường thẳng Δ có phương trình $x = 0$).
Khi đó, với mỗi điểm $M(x;y)$ trong hệ trục, ta có$MH = d(M;Ay) = |x|$ và $MT^2 = MO^2 - OT^2 = (x-R)^2 + y^2 - R^2$.
Vậy

$$MH = MT \text{Ł} x^2 = (x-R)^2 + y^2 - R^2 \text{Ł} y^2 = 2Rx.$$

Suy ra M chạy trên parabol $\mathcal{P} : y^2 = 2Rx$.
Ngược lại, với mỗi điểm $M(\frac{y^2}{2R}; y) \in \mathcal{P}$ thì $d(M;Ay) = \frac{y^2}{2R}$ và

$$MT^2 = MO^2 - R^2 = \left(\frac{y^2}{2R} - R\right)^2 + y^2 - R^2 = \left(\frac{y^2}{2R}\right)^2.$$

Do đó $MT = d(M;Ay)$.
Vậy, quỹ tích điểm M cần tìm là đường parabol, có đỉnh tại A, tiêu điểm là trung điểm I của AO



Hình 1

2. Gọi ℓ là đường chuẩn của $\mathcal{P}$, khi đó ℓ có phương trình $x = -\frac{R}{2}$.
Từ giả thiết, suy ra, với $M(x_0; y_0)$, thì $MI = d(M;\ell) = x_0 + \frac{R}{2} = MT + \frac{R}{2}$.
Vậy, đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính AO cố định.

Nhận xét.

(i) Nếu bỏ giả thiết Δ tiếp xúc với (O) thì quỹ tích là một parabol, thu được parabol ở trên bằng một phép tịnh tiến theo phương đường thẳng qua O vuông góc với Δ

(ii) Để ý rằng, đường tròn tâm M, bán kính MT trực giao với đường tròn (O). Do đó, phép nghịch đảo cực O, phương tích R^2 giữ bất biến hai đường tròn này, biến Δ

thành đường tròn đường kính AO. Từ đó, do tính bảo giác và tính đối hợp của phép nghịch đảo, suy ra đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính AO. Kết hợp với định nghĩa parabol, ta cũng được quỹ tích của M là parabol có đỉnh A, tiêu điểm là trung điểm AO

Ví dụ 2. Cho điểm A nằm trên đường thẳng Δ. Xét B, C trong mặt phẳng sao cho $AB = b, AC = c$, $(b, c > 0$ cho trước) và đường thẳng Δ là phân giác của góc $\angle BAC$. Gọi M là đỉnh thứ tư của hình bình hành dựng trên hai cạnh AB và AC. Tìm quỹ tích M.

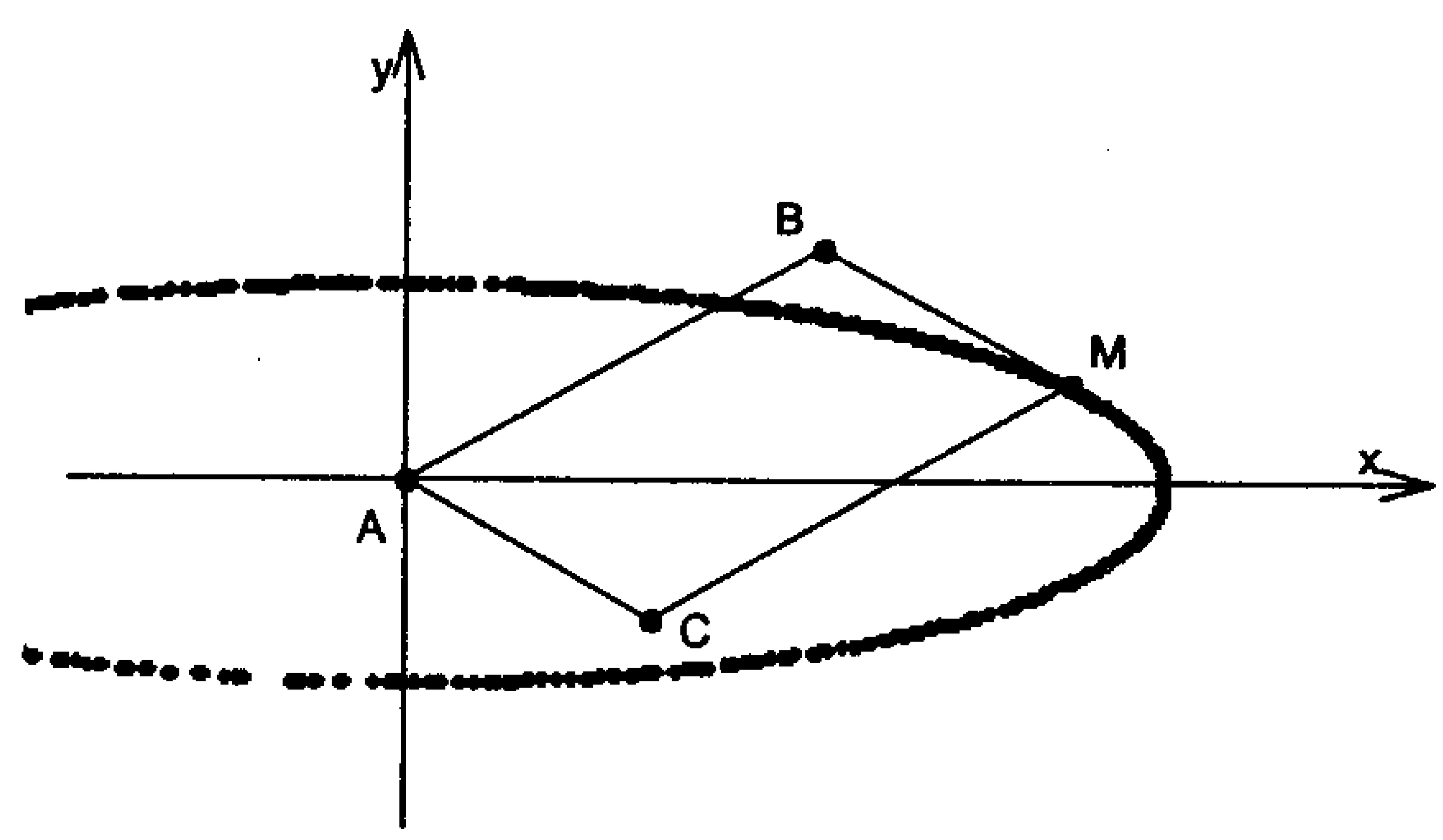
Lời giải. Trước hết, từ giả thiết ta nhận được B, C nằm về cùng một phía của đường thẳng qua A, vuông góc với Δ và các đường thẳng AB, AC đối xứng nhau qua đường thẳng Δ. Chọn hệ trục tọa độ Axy sao cho $B(b_1; b_2), C(c_1; c_2)$ trong đó $b_1^2 + b_2^2 = b^2, c_1^2 + c_2^2 = c^2$, và $b_1c_1 \geq 0, b_2c_2 \leq 0$. Khi đó, do $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ nên $M(b_1 + c_1; b_2 + c_2)$

+ Nếu $b_1c_1 = 0$ thì $M(0; b_2 + c_2) \in Ay$

+ Nếu $b_1c_1 \neq 0$ thì Không mất tính tírnh quát, coi $b_2 = kb_1, c_2 = -kc_1$, với $k \neq 0, \infty$.

Khi đó từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} b_1^2 = \frac{b^2}{1+k^1} \\ c_1^2 = \frac{c^2}{1+k^2} \\ b_1c_1 = \frac{bc}{1+k^2} \\ b_2c_2 = \frac{-k^2bc}{1+k^2} \end{cases} \quad (I)$$



Hình 2

Từ đó, với $M(x; y)$ thì $x = b_1 + c_1, y = b_2 + c_2$. Suy ra

$$\begin{cases} x = b_1 + c_1 \\ y = k(b_1 - c_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = b_1^2 + c_1^2 + 2b_1c_1 \\ y^2 = k^2(b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1) \end{cases} \xrightarrow{\text{Do (I)}} \frac{x^2}{(b+c)^2} + \frac{y^2}{(b-c)^2} = 1 \qquad (\star)$$

Vì vậy, M chạy trên đường elip có phương trình cho ở $(\star)$

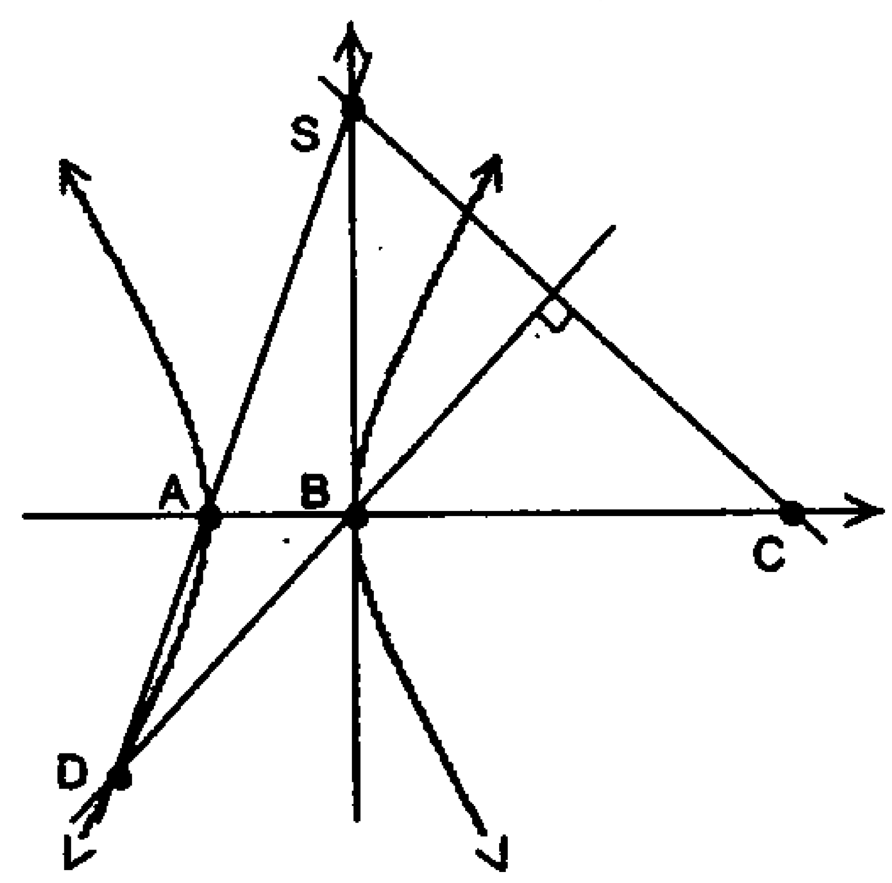
Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B và C thẳng hàng theo thứ tự, gọi Δ là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AC tại B. Với mỗi điểm $S \in \Delta$, gọi D là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với SC với đường thẳng SA. Tìm $\{D\}$

Lời giải. Chọn hệ tọa độ Bxy sao cho $A(-a; 0), C(c; 0) (a, c > 0), S(0, s), s \neq 0$. Khi đó

$$(SA): \; -\frac{x}{a} + \frac{y}{s} = 1, (SC): \; \frac{x}{c} + \frac{y}{s} = 1 \Longrightarrow (BD): \; \frac{x}{s} - \frac{y}{c} = 0$$

Từ đó, tọa độ của D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -\frac{x}{a} + \frac{y}{s} = 1 \\ \frac{x}{s} - \frac{y}{c} = 0 \end{cases}$$



Hình 3

Khử s từ hệ, ta thu được $-\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{c} = x$
Hay

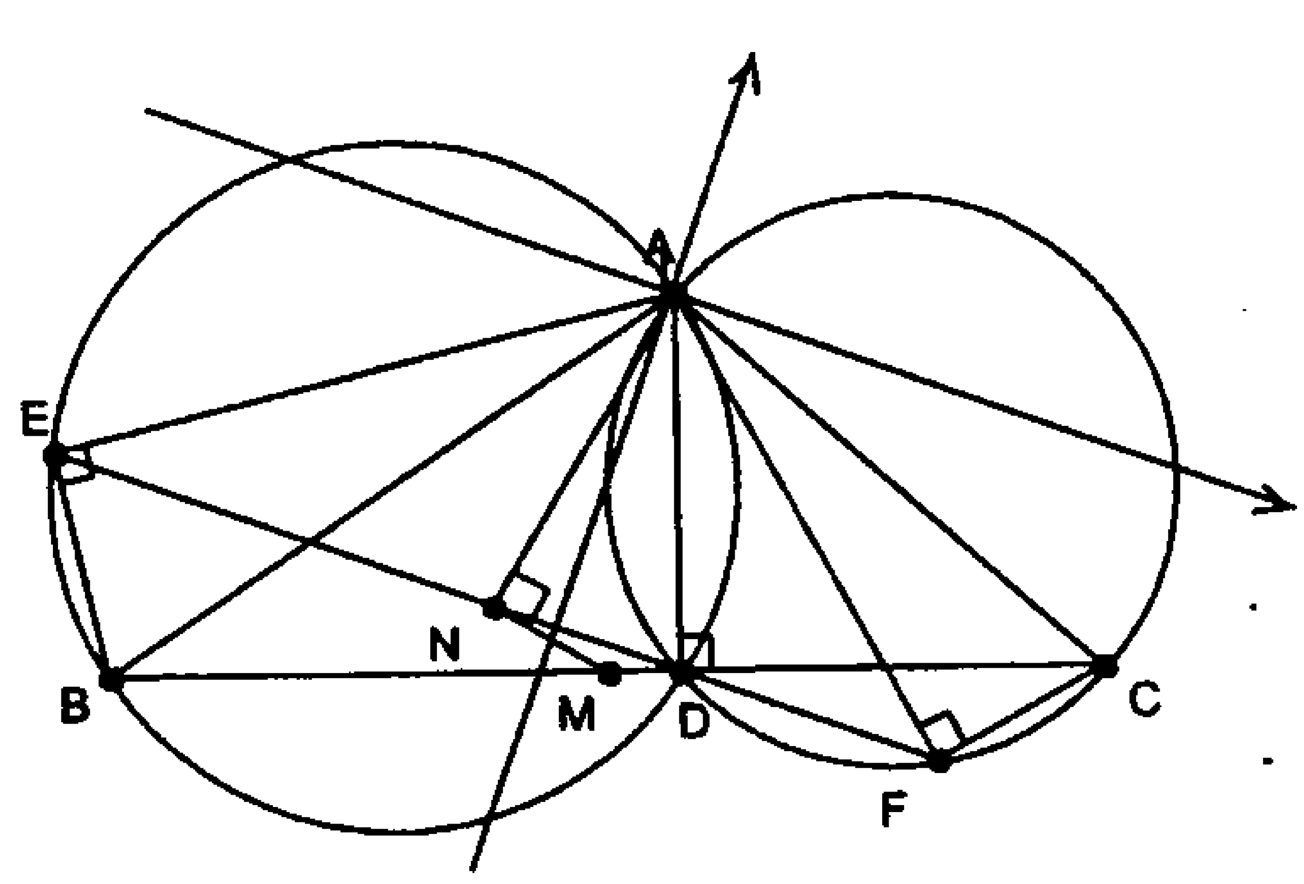
$$\frac{(x+\frac{a}{2})^2}{\frac{a^2}{2}} - \frac{y^2}{\frac{ac}{2}} = 1 \quad (\star)$$

Vậy, khi S chạy trên khắp trục tung, thì D chạy trên đường hyperbol $(\star)$

Nhận xét. Đối với các ví dụ 1,2 thì chúng ta không có nhiều sự lựa chọn trong việc chọn hệ trục tọa độ. Nhưng đối với ví dụ 3, tất nhiên trục hoành sẽ vẫn là đường thẳng AC, nhưng gốc tọa độ hoàn toàn có thể chọn là một trong ba điểm A, B hay C hoặc một điểm bất kỳ nào đó trên đường thẳng. Việc lựa chọn gốc tọa độ tại B khiến cho việc tính toán có vẻ đơn giản hơn (viết phương trình các đường thẳng, giải hệ tương giao, ...)

Ví dụ 4. (APMO 1998) Cho tam giác ABC với đường cao AD, δ là một đường thẳng đi qua D. Lấy $E, F \in \delta$, khác D, sao cho $AE \perp BE, AF \perp CF$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF. Chứng minh rằng $AN \perp MN$

Lời giải.



Hình 4

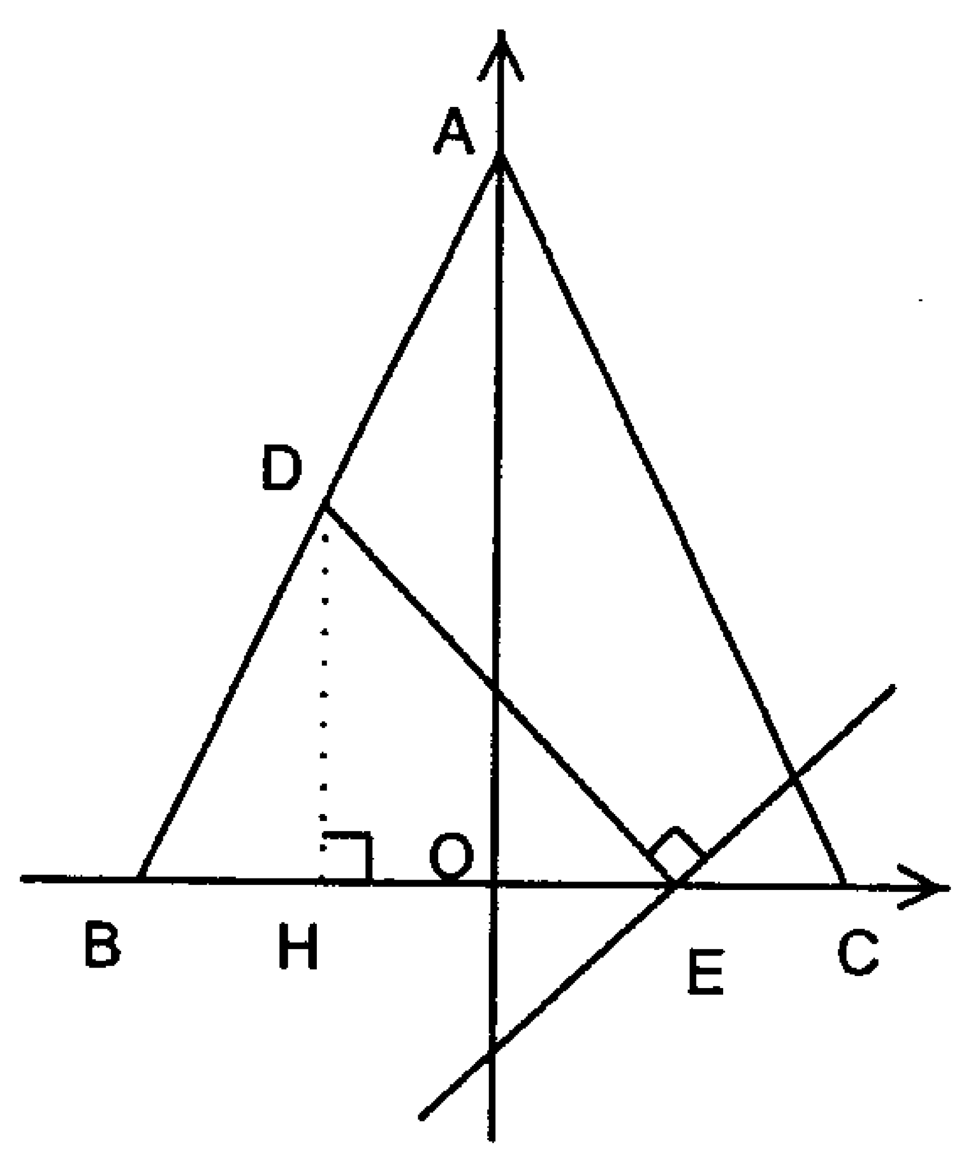
Chọn A làm gốc tọa độ, trục hoành chứa đường thẳng qua A song song với δ.
Giả sử $D(d; a), E(e; a), F(f; a) \Rightarrow N(\frac{e+f}{2}; a)$.
Khi đó, đường thẳng AE có phương trình $ax - ey = 0$,
đường thẳng AD có phương trình $ax - dy = 0$,
đường thẳng AF có phương trình $ax - fy = 0$.

Từ đó, do $BE \perp EA$ nên BE có phương trình $ex + ay - e^2 - a^2 = 0$,
do $CF \perp AF$ nên CF có phương trình $fx + ay - f^2 - a^2 = 0$,
do $BC \perp AD$ nên BC có phương trình $dx + ay - d^2 - a^2 = 0$
Từ đó, tìm được $B(d+e; a - \frac{de}{a}), C(d+f; a - \frac{df}{a})$. Suy ra $M(d + \frac{e+f}{2}; a - \frac{d(e+f)}{2a})$
$\Longrightarrow \overrightarrow{MN} = (-d; \frac{d(e+f)}{2a}) \Longrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AN} = -d \cdot \frac{e+f}{2} + a \cdot \frac{d(e+f)}{2a} = 0$ điều phải chứng minh.

Nhận xét. Việc chọn hệ tọa độ sao cho B, C trên trục hoành, A, D trên trục tung là hoàn toàn hợp lý. Tuy nhiên, chúng ta sẽ gặp khó khăn khi tìm tọa độ E, F. Cũng vậy, nếu chọn A làm gốc, trục hoành song song với BC, thì phương trình của AE, AF đã có thể tìm được ngay, nhưng còn khó khăn khi xác định sự thẳng hàng của E, D, F. Bởi vậy, việc chọn hệ tọa độ như trong lời giải nêu trên là thích hợp nhất.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A. Xét D trên cạnh AB và điểm E trên cạnh BC sao cho hình chiếu của DE trên BC có độ dài bằng $\frac{BC}{2}$.
Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với DE tại E luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



Hình 5

Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ tọa độ sao cho $A(0; a), B(-b; 0), C(b; 0)$ (hình 5). Khi đó các đường thẳng AB, AC lần lượt có phương trình

$$(AB) : -\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

$$(AC) : \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

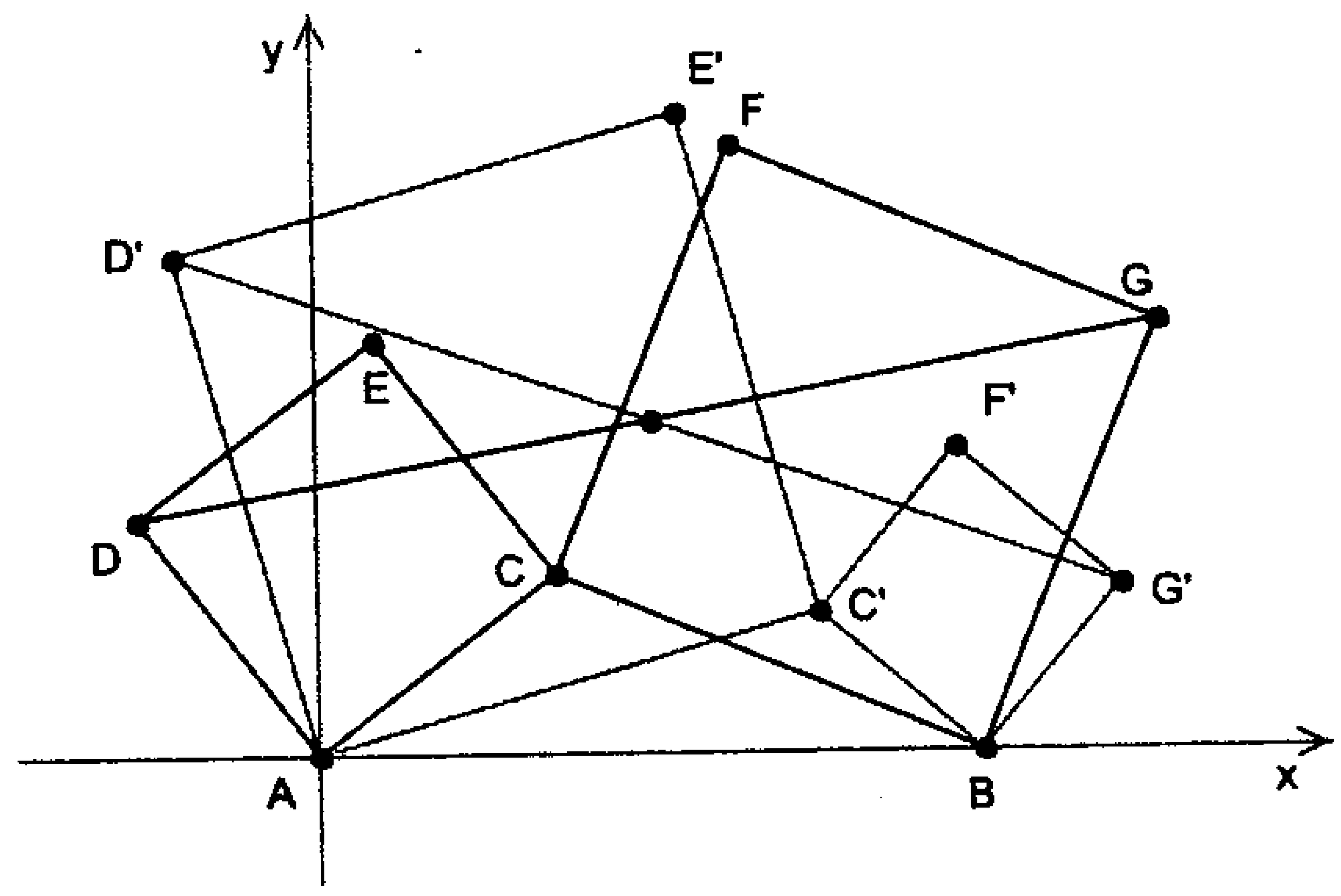
Gọi H là hình chiếu của D trên BC. Do $EH = \frac{BC}{2}$ nên $E \in [OC], H \in [OB]$.
Vậy, nếu $E(x_0; 0), 0 \le x_0 \le b$ thì $H(x_0 - b; 0)$ và do đó $D(x_0 - b; \frac{ax_0}{b})$.
Gọi Δ là đường thẳng qua E vuông góc với DE. Suy ra Δ nhận $\overrightarrow{DE} = (b; -\frac{ax_0}{b})$ làm một vectơ pháp tuyến, vì vậy $\Delta : b^2x - ax_0y - b^2x_0 = 0$
Phương trình này tương đương với $-(b^2 + ay)x_0 + b^2x = 0$
Suy ra Δ luôn đi qua điểm $(0; -\frac{b^2}{a})$ cố định.

Ví dụ 6. (Poland 1992) Trong mặt phẳng cho trước hai điểm A, B. Xét điểm C thay đổi trên một nửa mặt phẳng bờ AB. Dựng ra ngoài của tam giác ABC các hình vuông $ACED$ và $BCFG$. Chứng minh rằng đường thẳng DG luôn đi qua một điểm cố định khi C thay đổi.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Axy sao cho $A(0;0)$, $B(b;0)$ và $C(x_0;y_0)$, với $y_0 > 0$. Khi đó $D(-y_0;x_0), G(b+y_0;b-x_0)$. Vậy $\overrightarrow{DG} = (b+2y_0;b-2x_0)$ và do đó đường thẳng DG có phương trình

$$\frac{x+y_0}{b+2y_0} = \frac{y-x_0}{b-2x_0}$$

hay $(b-2x)x_0 + (b-2y)y_0 + b(x-y) = 0$



Hình 6

Từ đó đường thẳng DG luôn đi qua điểm $I(\frac{b}{2};\frac{b}{2})$ cố định.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B. Tìm quỹ tích tất cả những điểm M sao cho

$$|\angle MAB - \angle MBA| = 90^\circ$$

Lời giải.

Đặt $\angle MAB = \alpha, \angle MBA = \beta$ $(0^\circ \leq \alpha, \beta \leq 90^\circ)$. Khi đó, vì sự tồn tại điểm M nên $\alpha + \beta \neq 180^\circ$

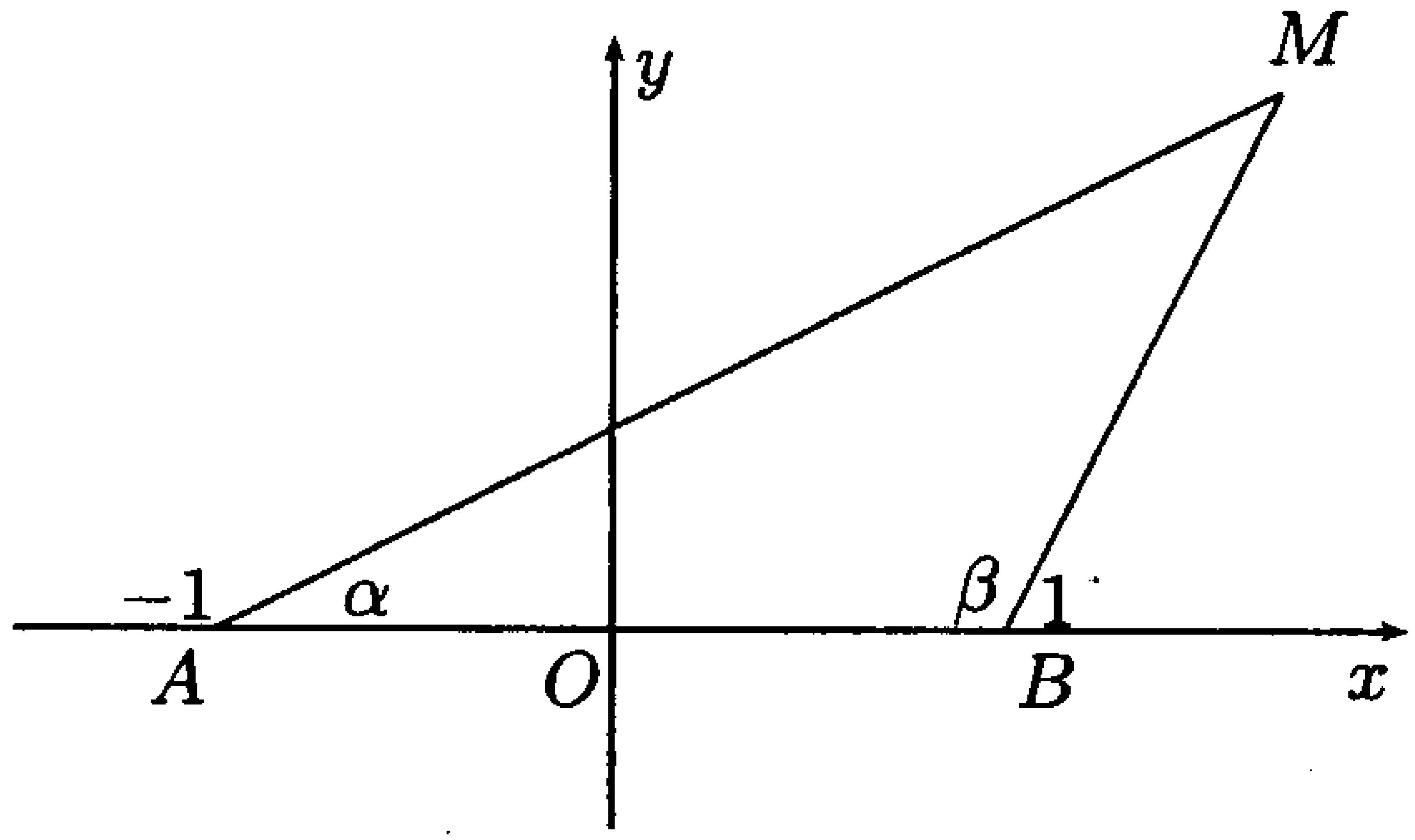
Nếu $\alpha = 0^\circ$ thì $\beta = 90^\circ$ và $M \equiv A$. Nếu $\beta = 0^\circ$ thì $\alpha = 90^\circ$ và $M \equiv B$. Vậy, chỉ cần xét $\alpha, \beta \neq 0^\circ, 90^\circ$

Không mất tính tírnh quát , có thể coi $AB = 2$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A(-1;0), B(1;0)$

Do $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ nên $\alpha = \beta + 90^\circ$ hoặc $\alpha = \beta - 90^\circ$. Điều này tương đương với $\tan\alpha = -\cot\beta$ hay tích hệ số góc của các đường thẳng MA, MB bằng 1. Vậy, tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = k(x+1) \\ ky = (x-1) \end{cases}$$

Khử k từ hệ, thu được $x^2 - y^2 = 1$



Hình 7

Vậy, quỹ tích M là hyperbol vuông có hai đỉnh thực là hai điểm A, B đã cho.

Nhận xét.

1. Chúng ta hoàn toàn có thể chọn hệ trục tọa độ một cách tùy ý, gốc ở vị trí bất kỳ. Nhưng việc chọn hệ tọa độ sao cho A, B nằm trên trục hành đã giúp ta tiết kiệm thời gian tính toán và giải bài toán đi rất nhiều. Với cách chọn tọa độ như vậy, chúng ta sẽ có ngay hệ số góc của MA bằng $\tan\alpha$ và hệ số góc của MB bằng $-\tan\beta$.

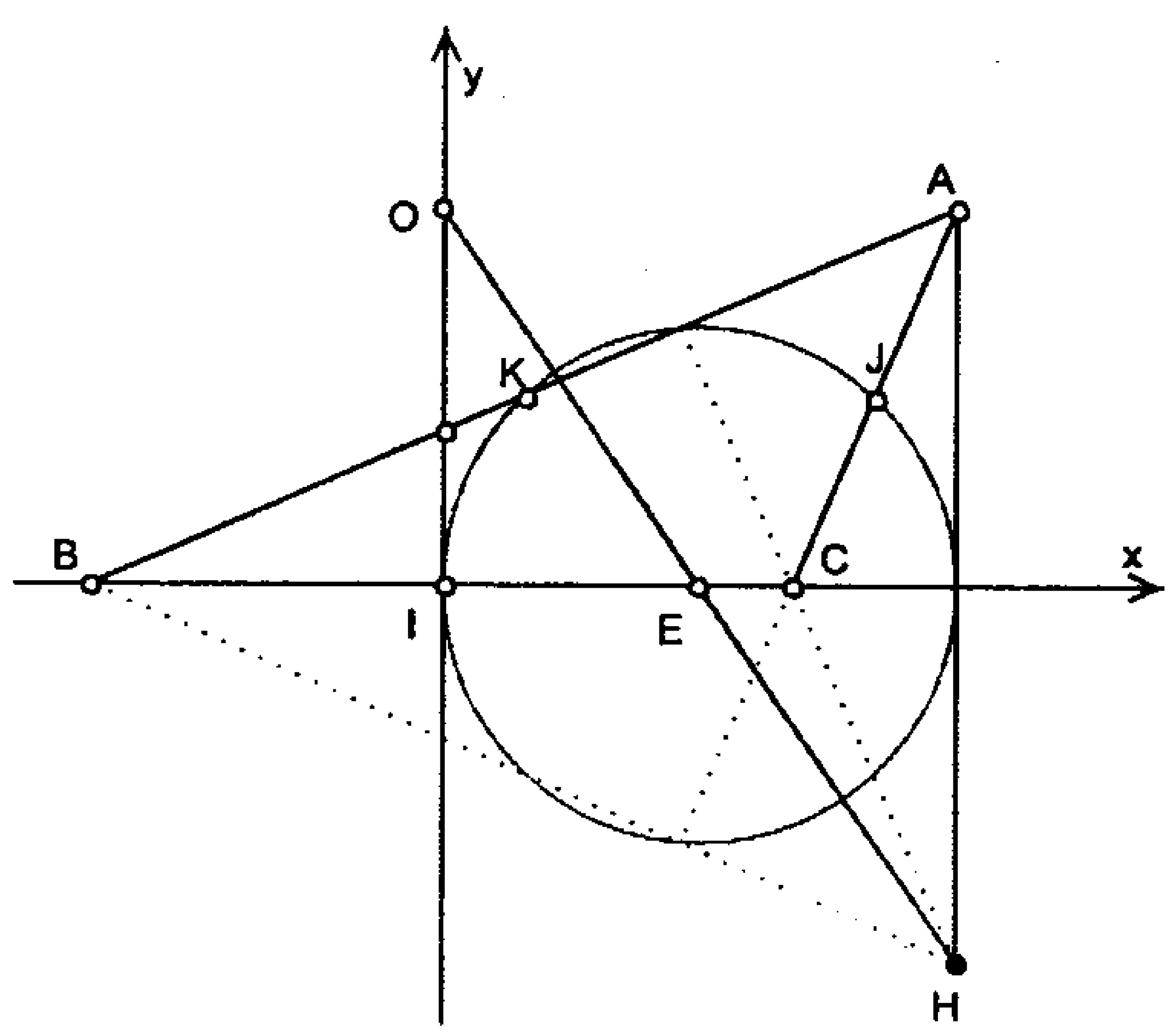
2. Để tránh việc phải phân chia trường hợp $\alpha = 0°$ hay $\neq 0°$ (tương ứng $\beta = 90°$ hay $\neq 90°$), có thể để ý đến $|\angle MAB - \angle MBA| = 90°$Ł$|\cos\angle MAB| = |\sin\angle ABM|$, chúng ta cũng thu được kết quả như trên.

3. Việc coi $AB = 2$ là hoàn toàn tự nhiên, bởi vì nếu $AB = a > 0$ thì bằng phép vị tự tâm O, tỷ số $\frac{2}{a}$ ta thu được ngay $AB = 2$.

Ví dụ 8. (CRUX 2003) Trong mặt phẳng cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định, còn đỉnh A thay đổi. Tìm quỹ tích điểm A sao cho tâm đường tròn Ơle của tam giác ABC nằm trên BC.

Lời giải. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và O, H, E là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, tâm đường tròn Ơle của tam giác ABC. Khi đó E là tâm đường tròn (IJK) và cũng là trung điểm OH.

Không mất tính tírnh quát có thể coi $BC = 2$. Chọn hệ trục tọa độ Ixy, sao cho $B(-1;0), C(1;0), A(x_0;y_0)$, với $y_0 \neq 0$. Khi đó $I(0;0), J(\frac{x_0+1}{2};\frac{y_0}{2}), K(\frac{x_0-1}{2};\frac{y_0}{2})$. Vì E là tâm đường tròn (IJK), nên E nằm trên trung trực của đoạn JK. Từ đó, và do $E \in BC$, suy ra $E(\frac{x_0}{2};0)$.Vì E là tâm đường tròn (IJK) nên $EI = EJ = EK$.



Hình 8

Từ đó ta được

$$\frac{x_0^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{y_0^2}{4} \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

Ngược lại, với A mỗi điểm $A(x_0; y_0) \in \mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$, bỏ đi hai điểm B, C thì có điểm $E(\frac{x_0}{2}; 0) \in BC$ cách đều I, J, K, do đó tâm đường tròn Ole của tam giác ABC nằm trên BC.

Vậy, quỹ tích đỉnh A của tam giác là đường hyperbol $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$, bỏ đi hai đỉnh B, C.

Nhận xét.

1. Để ý rằng "Với mọi tam giác ABC, tâm đường tròn Ole của tam giác nằm trên đường thẳng BC khi và chỉ khi $|\angle ABC - \angle ACB| = 90°$", nên bài toán 8 cũng có thể được giải như ở bài toán 7.

2. Ta cũng có thể sử dụng nhận xét E là trung điểm OH để giải quyết bài toán, tuy nhiên, việc tính toán, tìm tọa độ của E sẽ tương đối vất vả.

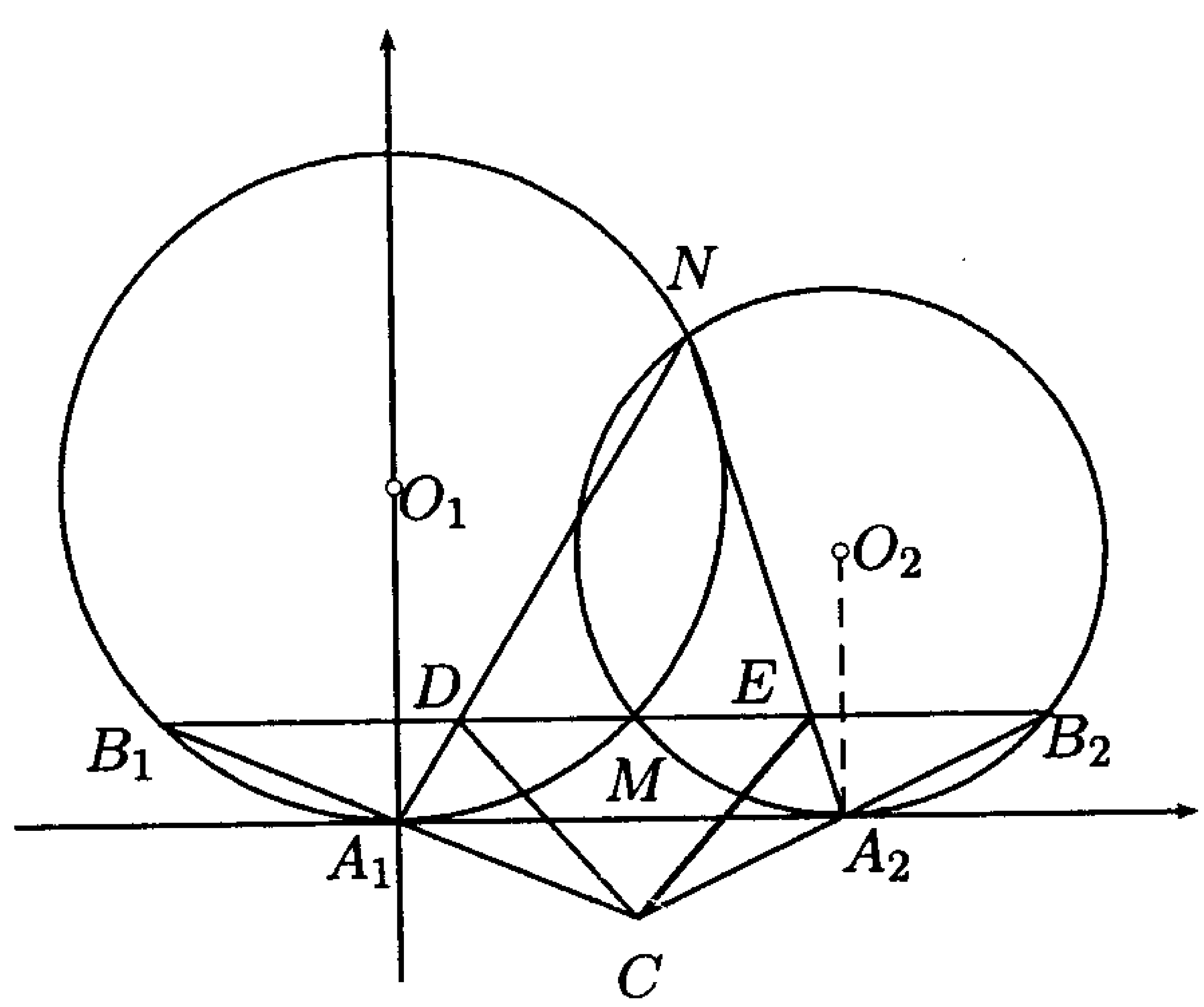
Ví dụ 9. (IMO 2000) Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N. Tiếp tuyến chung (gần M hơn) tiếp xúc với (O_i) tại A_i. Đường thẳng qua M, song song với A_1A_2, cắt lại đường tròn (O_i) ở điểm B_i. Các đường thẳng A_iB_i cắt nhau tại C, các đường thẳng A_iN cắt đường thẳng B_1B_2 ở D, E. Chứng minh rằng $CD = CE$

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ A_1xy sao cho $A_1(0; 0), A_2(a; 0), O_1(0; r_1), O_2(a; r_2)$. Giả sử trong hệ trục tọa độ $M(s; t)$, khi đó $B_1(-s; t), B_2(2a - s; t)$. Từ đó $B_1B_2 = 2a = 2A_1A_2$, để ý rằng $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, suy ra A_1, A_2 theo thứ tự là trung điểm B_1C, B_2C, do đó $C(s; -t)$. Vậy $\overrightarrow{CM} = (0; 2t), \overrightarrow{B_1B_2} = (2a; 0)$ suy ra $CM \perp B_1B_2$ hay $CM \perp DE$ (1)

Gọi K là giao điểm của MN với A_1A_2. Ta có

$$\mathcal{P}_{K/(O_1)} = \overline{KA_1}^2 = \overline{KM} \cdot \overline{KN} = \mathcal{P}_{K/(O_2)} = \overline{KA_2}^2$$

Suy ra K là trung điểm A_1A_2. Từ đó, do $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ nên M là trung điểm DE (2)



Hình 9

Từ (1),(2) suy ra CM là trung trực của DE. đpcm

Nhận xét.

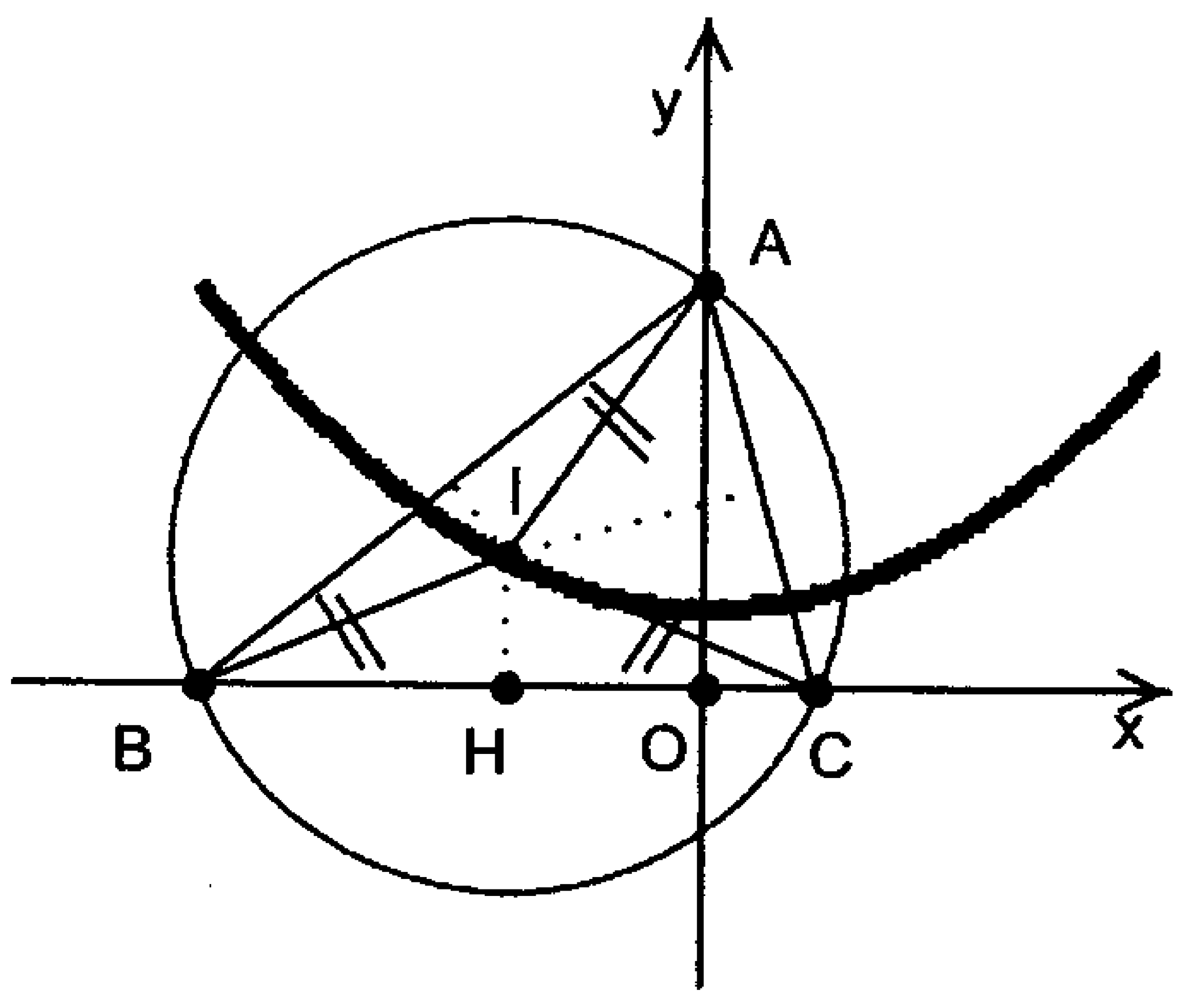
1. Trong ví dụ này, chúng ta hoàn toàn có thể chọn hệ trục tọa độ sao cho trục hoành chứa đường thẳng O_1O_2, tuy nhiên, khi đó việc tìm phương trình của B_1B_2 (và do đó tọa độ của B_1, B_2) không đơn giản.Việc chọn hệ trục tọa độ như trong lời giải ở trên là việc làm khôn ngoan, vì tọa độ của A_i, M, B_i tìm được một cách khá dễ dàng.

2. Trong lời giải nêu trên, việc viết phương trình của hai đường tròn, giải hệ phương trình tương giao để tìm tọa độ M, N là không cần thiết. Ở trên, chúng ta chỉ sử dụng đến đặc điểm O_iA_i là trung trực của đoạn MB_i, và do đó việc tìm tọa độ của các điểm B_i dễ dàng hơn rất nhiều so với việc đi viết phương trình các đường tròn.

3. Trong lời giải trên, đã kết hợp giữa phương pháp tọa độ và phương pháp tổng hợp (chỉ ra K là trung điểm A_1A_2). Điều đó giúp cho lời giải ngắn gọn và đẹp hơn.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng cho trước đường thẳng Δ và một điểm $A \notin \Delta$. Xét $B, C \in \Delta$ sao cho $BC = b > 0$ cho trước. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Lời giải. Gọi O là hình chiếu của A trên Δ và đặt $a = d(A; \Delta)$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A(a; 0), O(0; 0)$ (tức là trục hoành chứa Δ, trục tung chứ OA).



Hình 10

Giả sử trong hệ trục này $B(x_0; 0), C(x_0 + b; 0)$ (vì độ dài $BC = b$). Gọi H là trung điểm BC, khi đó $H(x_0 + \frac{b}{2}; 0)$ và $HB = HC = \frac{b}{2}$. Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó $x = x_0 + \frac{b}{2}$ và $IA = IB$ suy ra

$2ay = (x_0 + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4}$ hay $y = \frac{x^2}{2a} - \frac{b^2}{8a}$ $\quad (\star)$

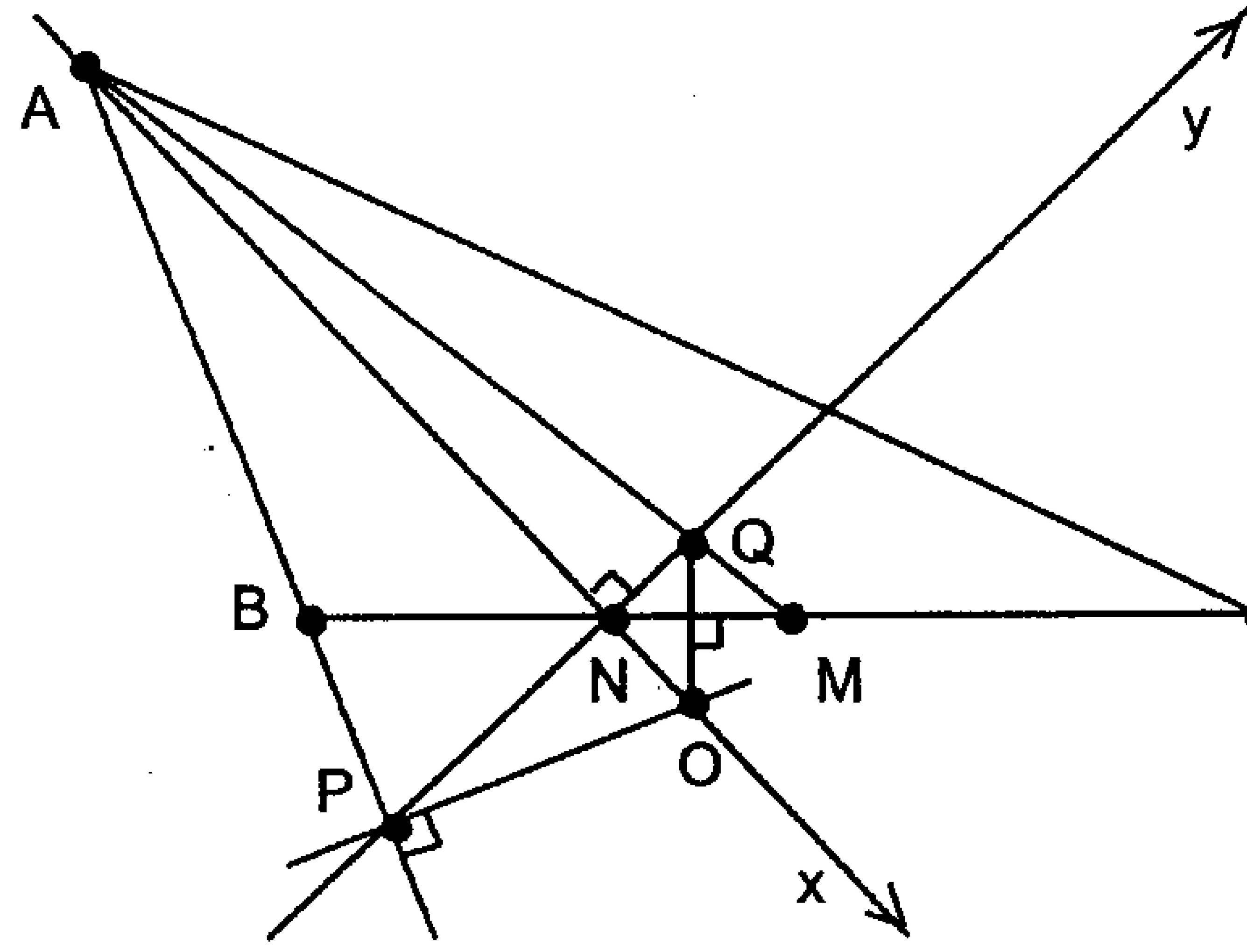
Vậy khi đoạn BC trượt trên Ox thì tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên parabol $\mathcal{P}$ có phương trình $(\star)$

Ngược lại, với mỗi điểm $I \in \mathcal{P}$, dễ dàng kiểm tra được $d(I; Ox) < IA$, do đó đường tròn tâm I, bán kính IA cắt Ox tại hai điểm B, C. Dễ dàng kiểm tra được $BC = b$.

Vậy quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là parbol có phương trình cho ở $(\star)$.

Ví dụ 11. (APMO 2000) Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh BC và N là chân đường phân giác của góc $\angle BAC$. Đường thẳng vuông góc với NA tại N cắt các đường thẳng AB, AM tại P, Q theo thứ tự đó. Gọi O là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB tại P với AN, chứng minh rằng $OQ \perp BC$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Nxy sao cho A, O nằm trên trục hoành. Giả sử AB có phương trình $y = ax + b$, khi đó $A(-\frac{b}{a}; 0), P(0; b)$ và AC có phương trình $y = -ax - b$ (do A thuộc trục hoành, AB, AC đối xứng nhau qua trục hoành).



Hình 11

Do $PO \perp AB$ nên PO có phương trình $y = -\frac{1}{a}x + b$ và $O(ab; 0)$ Do BC qua gốc tọa độ N, nên BC có phương trình $y = cx$. Suy ra $B(\frac{b}{c-a}; \frac{bc}{c-a}), C(-\frac{b}{c+a}; -\frac{bc}{c+a})$ do đó $M(\frac{ab}{c^2-a^2}; \frac{abc}{c^2-a^2}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{bc}{a(c^2-a^2)}(c; a^2)$. Từ đó, đường thẳng AM có phương trình $y = \frac{a^2}{c} \cdot x + \frac{ab}{c}$ suy ra $Q(0; \frac{ab}{c})$. Vậy đường thẳng QO có phương trình $x + cy - ab = 0$. Suy ra đường thẳng OQ, BC vuông góc với nhau.

Nhận xét. Trong bài toán trên, nếu chọn hệ tọa độ mà AN không nằm trên trục hoành, thì việc viết phương trình phân giác AN là rất khó. Khi chọn hệ tọa độ như vậy, giúp cho ta tránh được việc phải xác định tọa độ các đỉnh, phương trình các cạnh, các đường trong tam giác.

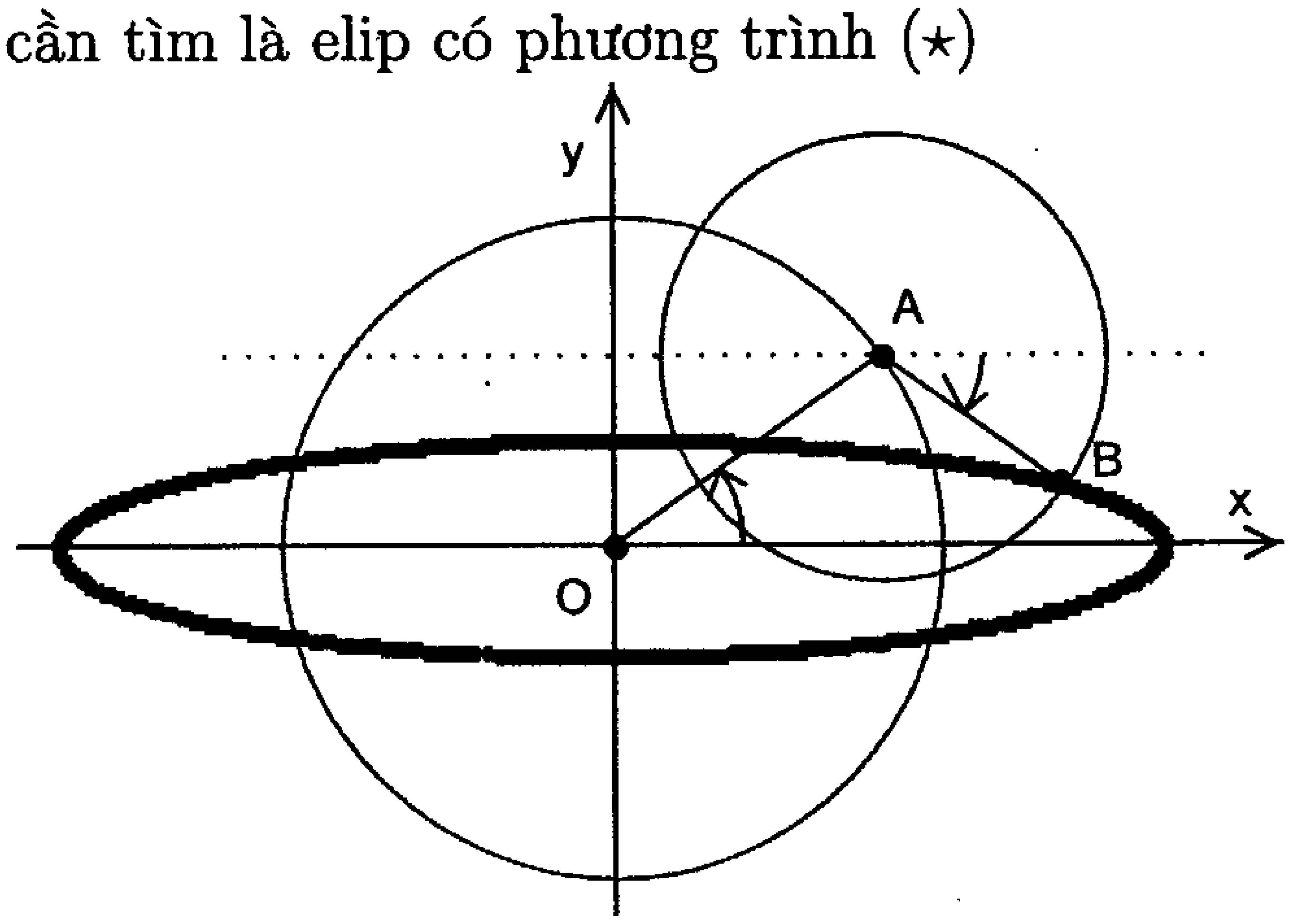
Ví dụ 12. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A chuyển động trên đường tròn. Xét điểm B chuyển động trên đường tròn $(A; R')$ với $R' \neq R$. Biết rằng A, B chuyển động với cùng vận tốc góc, nhưng ngược hướng, lúc ban đầu O, A, B thẳng hàng theo thứ tự; tìm quỹ tích điểm B.

Lời giải. Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho ở vị trí ban đầu $A, B \in Ox$. Khi đó $\overrightarrow{OA} = (R\cos t; R\sin t)$ và $\overrightarrow{AB} = (R'\cos t; -R'\sin t)$. Vì $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ nên với $B(x; y)$ thì $\begin{cases} x = (R + R')\cos t \\ y = (R - R')\sin t \end{cases}$

Khử t từ hệ thu được

$$\frac{x^2}{(R + R')^2} + \frac{y^2}{(R - R')^2} = 1 \quad (\star)$$

Vậy quỹ tích cần tìm là elip có phương trình $(\star)$



Hình 12

Bằng cách làm tương tự như trên, các bạn và các em hãy tự giải một số bài tập sau

1. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC có B, C cố định, A thay đổi. Gọi G và H theo thứ tự là trọng tâm và trực tâm của $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích đỉnh A, biết rằng trung điểm GH nằm trên BC.

(Việt Nam 2007)

2. Cho hai điểm D, E tương ứng trên hai cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho $DE \parallel BC$. Gọi P là một điểm tùy ý nằm bên trong tam giác, F, G là giao điểm của các đường thẳng BP, CP với DE. Gọi O_1, O_2 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PGD, PEF, chứng minh rằng $AP \perp O_1O_2$

(Iran 1996)

3. Trong mặt phẳng cho Δ, điểm $A \notin \Delta$. Cho trước số thực $a > 0$, tìm quỹ tích những điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và Δ bằng a.

4. Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi có A, B cố định, C, D thay đổi sao cho $AB \parallel CD$. Biết rằng $CD = b, AD + BC = c$ với b, c là các độ dài cho trước; tìm quỹ tích giao điểm hai đường chéo của tứ giác.

5. Cho ba điểm A, B và C thẳng hàng theo thứ tự. Về cùng một phía của đường thẳng, dựng các tia $Am, Cn \perp AC$. Xét $M \in Am, N \in Cn$ sao cho $\angle MBN = 90°$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

6. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng cắt các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC tại D, E và F tương ứng. Chứng minh rằng trực tâm các tam giác ABC, CDF và DEB thẳng hàng.

7. Cho trước góc vuông xOy, xét $M \in Ox, N \in Oy$ sao cho $MN = a-$const. Tìm quỹ tích trung điểm MN.

8. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Tìm quỹ tích tâm những đường tròn đi qua A và tiếp xúc ngoài với (O).

9. Cho hai đường tròn C_1, C_2 có cùng tâm O, hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc tại O. Một tia Ot quay quanh O, cắt C_1, C_2 tại A_1, A_2 theo thứ tự đó. Qua A_i vẽ đường thẳng $\Delta'_i \parallel \Delta_i$, tìm quỹ tích giao điểm của Δ'_1 và Δ'_2.

10. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm BC, E là hình chiếu của D trên CA và F là trung điểm DE. Chứng minh rằng $AF \perp BE$

11. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Xác định quỹ tích các điểm M của mặt phẳng sao cho đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MCD có cùng bán kính.

12. Cho A, B, C và D thẳng hàng theo thứ tự đó. Các đường tròn ω_1, ω_2 với đường kính AC, BD cắt nhau tại hai điểm phân biệt X, Y. Lấy $Z \in (XY)$, không trùng với $XY \cap AD$. CZ cắt lại ω_1 tại M và BZ cắt lại ω_2 tại N. Chứng minh rằng AM, DN và XY đồng quy

(IMO 1995)

13. Cho điểm P ở trong tứ giác lồi $ABCD$. Đường phân giác của các góc $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPD$ và $\angle DPA$ cắt các cạnh AB, BC, CD và DA tại K, L, M và N theo thứ tự đó. Xác định vị trí của P sao cho tứ giác $KLMN$ là một hình bình hành.

(Tournament of Towns 1995)

14. Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Lấy điểm X trên tia đối của tia AB, điểm Y trên tia đối của tia AC sao cho $BX = CA, CY = AB$. Gọi P là giáo điểm của đường thẳng XY với đường trung trực của BC. Chứng minh rằng $\angle BPC + \angle BAC = 180°$.

(BMO 2006 Round 2)

15. Cho hình vuông $ABCD$, dựng các tam giác đều ABK, BCL, CDM và DAN về phía trong của hình vuông. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng KL, LM, MN, NK và trung điểm của các đoạn $AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$ là đỉnh của một thập nhị diện đều.

(IMO 1977)

16. Cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ nằm bên trong và tiếp xúc trong với đường tròn (C) tại M, N theo thứ tự đó và $(C_1) \ni C_2$. Trục đẳng phương của $(C_1), (C_2)$ cắt (C) tại A, B. Các đường thẳng MA, MB cắt lại đường tròn (C) ở E, F. Chứng minh rằng EF tiếp xúc với (C_2).

(IMO 1999)

17. Cho hình vuông $ABCD$ và góc nhọn mAn (với các tia AM, An nằm giữa các tia AB, AD). Gọi B_1, B_2 là hình chiếu của B trên Am, An và D_1, D_2 là hình chiếu của D trên Am, An theo thứ tự đó. Chứng minh rằng $B_1B_2 \perp D_1D_2$

37 Kết luận

Qua các bài toán ở trên, tất nhiên chưa đủ để thấy hết những ưu điểm, nhược điểm của phương pháp tọa độ. Tuy nhiên, cũng là vừa đủ để chúng ta có thể thấy việc chọn hệ tọa độ như thế nào là thích hợp.

Muốn giải một bài toán bằng phương pháp tọa độ, ta cần phải chọn hệ trục tọa độ sao cho hình vẽ của chúng ta được quan sát tốt nhất trên hệ trục đó, việc tính toán cũng đơn giản nhất. Để chọn được một hệ trục tọa độ tốt, chúng ta cần phải căn cứ vào các yếu tố cố định bài toán đã cho, chú ý đến tính đối xứng của hình.

Tuy nhiên, khi đã chọn được một hệ trục tọa độ tốt rồi, cũng cần phải có phương pháp tính và kỹ năng tính tốt, thì việc giải một bài toán hình học bằng phương pháp tọa độ mới trở lên đẹp đẽ, ngắn gọn.

Thông qua bài viết này, chúng tôi muốn trao đổi với các em học sinh và các bạn đồng nghiệp một điều rằng "không phải phương pháp tọa độ làm mất đi vẻ đẹp của hình học, mà phương pháp tọa độ làm tăng thêm vẻ quyến rũ của hình học."