PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

❶. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- *Véctơ pháp tuyến (VTPT) của một đường thẳng là vectơ khác* $\vec{0}$ *và có giá vuông góc với đường thẳng.*
- *Phương trình tổng quát của đường thẳng: đi qua điểm* $I(x_0, y_0)$ *và có VTPT* $\vec{n}(a,b)$ *là:*
  $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Rightarrow ax+by+c=0,\ a^2+b^2 \neq 0$.
- *Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn: đi qua hai điểm* $A(a;0)$, $B(0;b)$ $(a,b \neq 0)$ *là* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.
- *Phương trình đường thẳng theo hệ số góc: đi qua điểm* $I(x_0, y_0)$ *và có hệ số góc* $k=\tan(Ox,Ot)$ *là* $y-y_0=k(x-x_0) \Rightarrow y=kx+m$.
- *Vị trí tương đối của hai đường thẳng:*

$\Delta_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0$ *và* $\Delta_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0$.

Nếu $a_2,b_2,c_2 \neq 0$ *thì:*

- Δ_1 *cắt* $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

- *Vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng là vectơ khác* $\vec{0}$ *và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng.*
- *Phương trình tham số của đường thẳng: đi qua điểm* $I(x_0, y_0)$ *và có VTCP* $\vec{u}(a;b)$ *là:* $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ $(a^2+b^2 \neq 0)$.
- *Phương trình chính tắc của đường thẳng: đi qua điểm* $I(x_0, y_0)$ *và có VTCP* $\vec{u}(a;b)$ *là:* $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$, $(a,b \neq 0)$.

B. PHÂN DẠNG TOÁN

➢ **Dạng ❶: Lập phương trình đường thẳng**

a. Dạng phương trình tổng quát:

✍. Cách 1

- *Tìm một điểm* $I(x_0, y_0)$ *thuộc đường thẳng.*
- *Tìm một VTPT* $\vec{n}(a,b)$ *của đường thẳng.*
- *Khi đó, phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm* $I(x_0, y_0)$ *và có VTPT* $\vec{n}(a,b)$ *là:*

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Rightarrow \text{a}x+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0$.

✍. Cách 2:

- *Tìm một VTPT* $\vec{n}(a,b)$ *của đường thẳng.*
- *Giả sử đường thẳng đã cho có dạng* $ax+by+c=0,\ (\text{a}^2+b^2\neq 0)$.
- *Đường thẳng đi qua điểm I nên thế vào phương trình trên tìm được c.*

Đặc biệt, *giả sử đường thẳng d có phương trình* $d: ax+by+c=0$.
Khi đó,

- *Nếu* $d' \parallel d$ *thì* d' *có phương trình:* $d': ax+by+c'=0,\ c'\neq c$.
- *Nếu* $d'' \perp d$ *thì* d'' *có phương trình:* $d'': bx-ay+c''=0$.

b. Dạngphương trình tham số, chính tắc:

- *Tìm một điểm* $I(x_0, y_0)$ *thuộc đường thẳng.*
- *Tìm một VTCP* $\vec{u}(a;b)$ *của đường thẳng.*
- *Khi đó, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm* $I(x_0, y_0)$ *và có VTCP* $\vec{u}(a;b)$ *là:* $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(a^2+b^2\neq 0)$.
- *Nếu* $a,b\neq 0$ *thì phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm* $I(x_0, y_0)$ *và có VTCP* $\vec{u}(a;b)$ *là:* $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$.

Đặc biệt,

- *d đi qua hai điểm* $A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B)$ *thì có VTCP* $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A; y_B-y_A)$.
- *Giả sử đường thẳng d có phương trình* $d: ax+by+c=0$.

Khi đó, $d' \parallel d$ *thì* d' *có VTCP* $\overrightarrow{u'}=(a,b)$.
$d'' \perp d$ *thì* d'' *có VTCP* $\overrightarrow{u''}(-b,a)$ *hoặc* $\overrightarrow{u''}(b,-a)$.

- *d có hệ số góc k thì d có VTCP* $\vec{u}(1;k)$.

✰. Chú ý:

- *Đường thẳng cắt 2 trục tọa độ thì chọn dạng phương trình đoạn chắn.*

- *Nếu đường thẳng d có VTPT* $\vec{n}(a,b)$ *thì đường thẳng d có VTCP* $\vec{u}(-b,a)$ *hoặc* $\vec{u}(b,-a)$.

Ngược lại, nếu đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(a,b)$ *thì đường thẳng d có VTPT* $\vec{n}(-b,a)$ *hoặc* $\vec{n}(b,-a)$.

- *Có vô số VTCP (VTPT) và chúng cùng phương với nhau nên ta có thể chọn tọa độ tỉ lệ và thỏa điều kiện vectơ khác* $\vec{0}$.

1. *Viết phương trình tổng quát của đường thẳng biết d:*
a. Đi qua $M(1;2)$ *và có VTPT* $\vec{n}(-2;1)$.
b. Đi qua $M(2;-3)$ *và có VTCP* $\vec{u}(4;6)$.
c. Đi qua $A(2;0)$ *và* $B(0;-3)$.
d. Đi qua $M(-5;-8)$ *và có hệ số góc* $k=-3$.
2. *Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d:*
a. Đi qua $M(-1;-4)$ *và song song với đường thẳng* $d':3x+5y-2=0$.
b. Đi qua $N(1;1)$ *và vuông góc với đường thẳng* $2x+3y+7=0$.
3. *Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d:*
a. Đi qua hai điểm $A(2;1)$ *và* $B(-4;5)$.
b. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=2-t \end{cases}$ *c.* $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+1}{7}$.
4. *Lập phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d:*
a. Đi qua điểm $M(2;1)$ *và có VTCP* $\vec{u}=(3;-2)$.
b. Đi qua điểm $M(1;-2)$ *và có VTPT* $\vec{n}(-5;3)$.
c. Đi qua điểm $M(3;2)$ *và có hệ số góc* $k=-2$.
d. Đi qua điểm $A(3;4)$ *và* $B(4;2)$.
5. *Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng:*
a. $d:2x+3y-6=0$. *b.* $d: y=4x-5$.
c. $d: x=3$ *d.* $d:\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{-3}$.
6. *Cho hai điểm* $P(4;0)$ *và* $Q(0;-2)$. *Viết phương trình tổng quát của đường thẳng:*
a. Đi qua điểm $R(3;2)$ *và song song với đường thẳng PQ.*
b. Trung trực của PQ.
7. *Cho điểm* $A(-5;2)$ *và đường thẳng* $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}$.
Viết phương trình đường thẳng d':
a. Qua A và song song với d.
b. Qua A và vuông góc với d.

8. *Viết phương trình các đường trung trực của* ΔABC *biết* $M(-1;1)$, $N(1;9)$, $P(9;1)$ *lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC.*

9. *Một đường thẳng d đi qua điểm* $M(5;-3)$ *cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d.*

10. *Viết phương trình đường thẳng d đi qua* $M(2;5)$ *và cách đều hai điểm* $P(-1;2)$ *và* $Q(5;4)$. *(HD: Xét 2TH d song song và không song song với đường thẳng PQ)*

11. *Cho đường thẳng* $d_1: 2x-y-2=0$; $d_2: x+y+2=0$ *và điểm* $M(3;0)$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua M, cắt* d_1, d_2 *lần lượt tại điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB.*

12. *Lập phương trình đường thẳng* Δ *đi qua* $Q(2;3)$ *và cắt tia Ox, Oy tại hai điểm M, N khác O sao cho* $OM+ON$ *nhỏ nhất.*

➢Dạng ❷: Vị trí tương đối, tương giao của hai đường thẳng:

- *Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng* $\Delta_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0$ *và* $\Delta_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0$ *ta xét số nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \text{(I)}.$$

Nếu hệ (I) có một nghiệm thì Δ_1 *cắt* Δ_2.

Nếu hệ (I) vô nghiệm thì $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.

Nếu hệ (I) có vô số nghiệm thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

Đặc biệt, Nếu $a_2b_2c_2 \neq 0$ *thì:*

- Δ_1 *cắt* Δ_2 $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

- *Để tìm giao điểm của 2 đường thẳng* Δ_1, Δ_2 *ta giải hệ phương trình (I).*
- *Hai đường thẳng* $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0 \end{array}\right.$.
- *Ba đường thẳng* d_1, d_2, d_3 *đồng quy khi và chỉ khi giao điểm A của* d_1, d_2 *thuộc đường thẳng* d_3.

13. *Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của 2 đường thẳng:*

a. $d: 2x-5y+3=0$ *và* $d': 5x+2y-3=0$.

b. $d: x-3y+4=0$ *và* $d': \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y+4=0$.

c. $d: 10x+2y-3=0$ *và* $d': 5x+y-\frac{3}{2}=0$.

14. *Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của 2 đường thẳng:*

a. $d: \begin{cases} x=-1-5t \\ y=2+4t \end{cases}$ *và* $d': \begin{cases} x=-6+5t' \\ y=2-4t' \end{cases}$.

b. $d: \begin{cases} x=1-4t \\ y=2+2t \end{cases}$ *và* $d': 2x+4y-10=0$.

c. $d: \begin{cases} x=-2+t \\ y=2+2t \end{cases}$ *và* $d': \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-2}$.

15. *Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của hai đường thẳng:*

$d: mx+y+2=0$ *và* $d': x+my+m-1=0$.

16. *Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc:*

$\Delta_1: mx+y+8=0$ *và* $\Delta_2: x-y+m=0$.

17. *Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy:*

$d_1: 2x+y-4=0$; $d_2: 5x-2y+3=0$ *và* $d_3: mx+3y-2=0$.

18. *Cho đường thẳng* $d: \begin{cases} x=2-3t \\ y=t \end{cases}$ *và* $B(2;1)$.

a. Tìm giao điểm của d với hai trục Ox, Oy.

b. Tìm trên d điểm M sao cho đoạn BM ngắn nhất.

19. *Cho hai đường thẳng* $d_1: \begin{cases} x=3+2t \\ y=-4+t \end{cases}$ *và* $d_2: \begin{cases} x=t' \\ y=-10+t' \end{cases}$.

a. Viết phương trình tổng quát của d_1, d_2.

b. Tìm giao điểm của d_1, d_2.

20. *Cho đường thẳng* $d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3+t \end{cases}$.

a. Tìm điểm M trên d và cách điểm $A(0;1)$ *một khoảng bằng 5.*

b. Tìm tọa độ giao điểm của d với đường thẳng $x+y+1=0$.

21. *Cho hai đường thẳng:*

$\Delta_1: (m+1)x-2y-m-1=0$ *và* $\Delta_2: x+(m-1)y-m^2=0$.

a. *Tìm giao điểm I của* Δ_1 *và* Δ_2.

b. *Tìm điều kiện của m để I nằm trên trục Oy.*

22. *Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm M của hai đường thẳng* $\Delta_1 : 2x - y + 5 = 0$, $\Delta_2 : 3x + 2y - 3 = 0$ *và*

a. d đi qua điểm $A(-3;-2)$.

b. d cùng phương với đường thẳng $d' : x + y + 9 = 0$.

c. d vuông góc với đường thẳng $d'' : x + 3y + 1 = 0$.

23. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua điểm* $M(3;1)$ *và cắt 2 tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho:*

a. $OA + OB$ *nhỏ nhất.*

b. $S_{\Delta OAB}$ *nhỏ nhất.*

c. $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ *nhỏ nhất.*

➢Dạng ❸: Tìm hình chiếu H của điểm A trên đường thẳng d.

✍.Cách 1:

- *Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A vuông góc với d.*
- *Hình chiếu H là giao điểm của d và d'.*

✍Cách 2: Dùng điểm tổng quát

- $H \in d \Rightarrow H(\ ;\ )$.
- *H là hình chiếu của A trên d* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow ... \Rightarrow H(\ ;\ )$.

✫.Chú ý: Tìm điểm tổng quát thuộc đường thẳng.

- *Nếu đường thẳng d cho dưới dạng phương trình tổng quát*
  $d : ax + by + c = 0$ *thì* $H \in d \Rightarrow H\left(t; -\dfrac{at+c}{b}\right)$ *hoặc* $H\left(-\dfrac{bt+c}{a}; t\right)$.
- *Nếu đường thẳng d cho dưới dạng phương trình tham số*
  $d : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ *thì* $H \in d \Rightarrow H\left(x_0 + at; y_0 + bt\right)$.
- *Nếu đường thẳng d cho dưới dạng phương trình chính tắc*
  $d' : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ *thì*
  $H \in d \Rightarrow H\left(x_0 + at; y_0 + bt\right)$.

➢.Dạng ❹: Tìm điểm đối xứng A' của A qua đường thẳng d.

- *Tìm điểm H là hình chiếu của A trên d (xem dạng 3).*
- *A' đối xứng với A qua d* $\Leftrightarrow$ *H là trung điểm của AA'*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow H(\ ;\ ).$$

➢.Dạng ❺: Tìm đường thẳng d' đối xứng của đường thẳng d qua điểm I cho trước.

✍.Cách 1:

- *Lấy một điểm cụ thể A thuộc d.*
- *Tìm điểm B đối xứng với A qua I thì B thuộc d'.*
- *Viết phương trình đường thẳng d' đi qua I và nhận VTPT của d làm VTPT.*

✍.Cách 2:

- *Lấy* $M(x;y)$ *bất kỳ thuộc d.*
- *Gọi* $M'(x';y')$ *là điểm đối xứng của M qua I*

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x+x'}{2} \\ y_I = \dfrac{y+y'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x_I - x' \\ y = 2y_I - y' \end{cases}.$$

- *Thế x, y vào phương trình đường thẳng d ta được phương trình đường thẳng d'.*

➢.Dạng ❻: Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua Δ.

✍.Cách 1:

*** Trường hợp nếu d cắt Δ**

- *Tìm giao điểm I của d và* Δ.
- *Lấy một điểm cụ thể A thuộc d rồi tìm điểm A' đối xứng với A qua I.*
- *Viết phương trình đường thẳng d' đi qua I, A'.*

*** Trường hợp nếu** $d \parallel \Delta$

- *Lấy một điểm cụ thể A thuộc d rồi tìm điểm A' đối xứng với A qua* Δ *(xem dạng 4).*
- *Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A' và nhận VTCP của d làm VTCP (hoặc nhận VTPT của d làm VTPT).*

✍.Cách 2:

- *Lấy hai điểm cụ thể* $A, B \in d$.
- *Tìm A', B' đối xứng với A, B qua* Δ *(xem dạng 4).*
- *Viết phương trình đường thẳng d' đi qua 2 điểm A', B'.*

24. *Cho đường thẳng* $d: x-2y+4=0$ *và điểm* $A(4;1)$.
a. Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên d.
b. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua d.

25. *Tìm hình chiếu của* $M(3;1)$ *lên đường thẳng* $d: \begin{cases} x=-2-2t \\ y=1+2t \end{cases}$.

26. *Tìm hình chiếu của điểm* $P(3;-2)$ *lên mỗi đường thẳng:*

a. $d: \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases}$ *b.* $d: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-4}$ *c.* $d: 5x-12y+10=0$.

27. *Với điều kiện nào thì các điểm* $M(x_1;y_1)$ *và* $N(x_2;y_2)$ *đối xứng với nhau qua đường thẳng* $\Delta: ax+by+c=0$.

28. *Tìm tọa độ điểm I' đối xứng với điểm* $I(1;2)$ *qua đường thẳng* $d: x-5y+2=0$.

29. *Cho đường thẳng* $\Delta: 2x-y+1=0$ *và điểm* $I(1;2)$. *Viết phương trình đường thẳng d đối xứng với* Δ *qua I.*

30. *Cho hai đường thẳng* $d_1: x+y-1=0$ *và* $d_2: x-3y+3=0$. *Viết phương trình đường thẳng d đối xứng với* d_1 *qua* d_2.

31. *Cho đường thẳng* $d: ax+by+c=0$. *Viết phương trình đường thẳng* d' *đối xứng với đường thẳng d:*

a. Qua trục hoành *b. Qua trục tung* *c. Qua gốc tọa độ.*

➢.Dạng ❼: Các yếu tố của tam giác, tứ giác.

Tam giác ABC có tọa độ 3 đỉnh. Khi đó:

- *Phương trình cạnh BC: đi qua B và C.*
- *Phương trình đường cao AH: đi qua A và vuông góc với BC.*
- *Phương trình trung tuyến AM: đi qua A và trung điểm M của BC.*
- *Phương trình trung trực của BC: đi qua trung điểm M của BC và vuông góc với BC.*
- *Phương trình phân giác AD: đi qua A và D với D là điểm chia đoạn BC theo tỷ số* $k=-\dfrac{AB}{AC}$ $\Rightarrow D\left(x_D=\dfrac{x_B-kx_C}{1-k}; y_D=\dfrac{y_B-ky_C}{1-k}\right)$.

✰.Chú ý:

Khi đề cho:

- *Phương trình đường phân giác : từ 1điểm cụ thể dựng vuông góc với đường phân giác.*
- *Phương trình đường trung tuyến: dùng điểm tổng quát.*
- *Phương trình đường cao: ta viết được phương trình đường thẳng.*

32. *Cho* $\triangle ABC$ *có phương trình 3 cạnh* $AB: 2x-3y-1=0$, $BC: x+3y+7=0$, $CA: 5x-2y+1=0$. *Viết phương trình đường cao BH.*

33. *Cho* $\triangle ABC$ *biết* $A(1;4)$, $B(3;-1)$, $C(6;2)$.

a. Viết phương trình các đường thẳng AB, BC, CA.

b. Viết phương trình đường cao AH và phương trình trung tuyến AM.

34. *Cho* $\triangle ABC$ *biết* $AB: x-3y+11=0$, *đường cao* $AH: 3x+7y-15=0$, *đường cao* $BH: 3x-5y+13=0$. *Viết phương trình các đường thẳng AC, BC.*

35. *Cho* $\triangle ABC$ *có* $A(-2;3)$ *và hai đường trung tuyến* $BM: 2x-y+1=0$, $CN: x+y-4=0$. *Viết phương trình 3 đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.*

36. *Cho* $\triangle ABC$ *có trọng tâm* $G(3;5)$ *và phương trình* $AB: 2x-3y+1=0$, $AC: 4x+y-5=0$. *Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.*

37. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* $M(-2;-4)$ *và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho OAB là tam giác vuông cân.*
38. *Cho* $\triangle ABC$ *với* $A(2;4)$, $B(4;8)$, $C(13;2)$. *Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.*
39. *Cho* $\triangle ABC$, *biết* $A(1;1)$ *và trọng tâm* $G(1;2)$, *cạnh AC và đường trung trực của nó lần lượt có phương trình* $x+y-2=0$ *và* $-x+y-2=0$. *Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC.*
a. Tìm tọa độ các điểm M và N.
b. Viết phương trình hai đường thẳng chứa 2 cạnh AB và BC.
40. *Cho* $\triangle ABC$ *có* $AB: 2x+6y+3=0$, $AC: \begin{cases} x=2-t \\ y=t \end{cases}$ *và* $M(-1;1)$ *là trung điểm của BC. Viết phương trình cạnh BC.*
41. *Viết phương trình 3 cạnh của* $\triangle ABC$ *biết* $C(4;3)$ *và trung tuyến* $AM: 4x+13y-10=0$, *phân giác* $AD: x+2y-5=0$.
42. *Cho* $\triangle ABC$ *với* $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$.
a. Viết phương trình các đường trung trực của tam giác. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
b. Viết phương trình các đường cao. Từ đó, suy ra tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.
c. Chứng minh 3 điểm H, I, G thẳng hàng với G là trọng tâm $\triangle ABC$.
43. *Cho hình bình hành ABCD có* $A(4;-1)$ *và phương trình 2 cạnh* $BC: x-3y=0$, $CD: 2x+5y+6=0$. *Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.*
44. *Cho hình bình hành ABCD có tâm đối xứng* $I(3;5)$ *và* $AB: x+3y-6=0$, $AD: 2x-5y-1=0$. *Viết phương trình 2 cạnh còn lại.*
45. *Cho hình bình hành AOBC với* $A(-3;0)$ *và giao điểm* $I(0;2)$ *của hai đường chéo AB và OC.*
a. Viết phương trình các đường thẳng chứa các đường chéo.
b. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh.
46. *Cho* $A(-1;3)$ *và đường thẳng* $\Delta: x-2y+2=0$. *Dựng hình vuông ABCD sao cho hai đỉnh A, B nằm trên* Δ *và các tọa độ của đỉnh C đều dương. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.*
47. *Viết phương trình các đường thẳng chứa bốn cạnh của hình vuông ABCD biết* $A(-1;2)$ *và phương trình của một đường chéo là* $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2t \end{cases}$.

❷. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- *Khoảng cách từ điểm* $M_0(x_0;y_0)$ *đến đường thẳng* $\Delta: ax+by+c=0$ *được cho bởi công thức* $d(M_0;\Delta)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- *Vị trí của hai điểm* $M(x_M;y_M), N(x_N;y_N)$ *đối với đường thẳng* $\Delta: ax+by+c=0$ *(*$(M,N\notin\Delta)$*:*
  - *M, N nằm cùng phía đối với* $\Delta \Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.
  - *M, N nằm khác phía đối với* $\Delta \Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.
- *Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hau đường thẳng cắt nhau* $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ *và* $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ *là:*

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=0$$

- *Góc tạo bởi hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *có vectơ pháp tuyến* $\overrightarrow{n_1}$ *và* $\overrightarrow{n_2}$ *được tính bởi công thức:* $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\right|=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

B. PHÂN DẠNG TOÁN

➢.Dạng ❶: Tính góc và khoảng cách

- *Góc giữa hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì bằng* 0^o.
- *Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau là góc nhỏ nhất* φ *trong bốn góc tạo thành. Gọi* $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ *là các VTCP;* $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ *là các VTPT thì:*

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\right|=\left|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\right|.$$

- *Góc A của* $\triangle ABC$ *là góc giữa hai vectơ* $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.
- *Khoảng cách giữa hai điểm* $A(x_A;y_A), B(x_B,y_B)$ *là:* $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- *Khoảng cách từ điểm* $M_0(x_0;y_0)$ *đến đường thẳng* $\Delta: ax+by+c=0$ *được cho bởi công thức* $d(M_0;\Delta)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

✰.Chú ý:

Để tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0)$ *đến đường thẳng* Δ *thì đường thẳng* Δ *phải viết dưới dạng phương trình tổng quát.*

48. *Tìm góc giữa hai đường thẳng:*

a. $d: 4x-2y+5=0$ *và* $d': x-3y+1=0$.

b. $d: \sqrt{3}x-y+1=0$ *và* $d': x=0$.

c. $d: 3x-2y-1=0$ *và* $d': 2x+3y-8=0$.

d. $d: \begin{cases} x=t \\ y=3+2t \end{cases}$ *và* $d': \begin{cases} x=-1+3t' \\ y=t' \end{cases}$.

e. $d: \begin{cases} x=-4-2t \\ y=t \end{cases}$ *và* $d': 2x-y+6=0$.

49. *Cho hai đường thẳng* $d_1: (m-1)x+(m+1)y-5=0$ *và* $d_2: mx+y+2=0$.

a. *Chứng minh rằng* d_1, d_2 *luôn cắt nhau với mọi giá trị của m.*

b. *Tính góc giữa* d_1, d_2.

50. *Cho hai đường thẳng* $d: x-2y+5=0$ *và* $d': 3x-y=0$. *Tìm giao điểm và tính góc giữa d và d'.*

51. *Cho* $\triangle ABC$ *có* $A(4;-1)$, $B(-3;2)$ *và* $C(1;6)$. *Tính góc A và giữa hai đường thẳng AB, AC.*

52. *Tìm các góc của tam giác* $\triangle ABC$ *biết phương trình các cạnh của tam giác là:* $AB: x+2y=0, AC: 2x+y=0, BC: x+y-1=0$.

53. *Tìm các giá trị của m để đường thẳng* $d: mx+y+1=0$ *hợp với đường thẳng* $d': 2x-y+9=0$ *một góc bằng* 30^o.

54. *Xác định các giá trị của a để góc tạo bởi hai đường thẳng* $d: \begin{cases} x=2+at \\ y=1-2t \end{cases}$ *và* $d': 3x+4y+12=0$ *bằng* 45^o.

55. *Tìm khoảng cách từ các điểm đến các đường thẳng tương ứng sau đây:*

a. $A(3;5),\ \Delta: 4x+3y+1=0$.

b. $B(1;-2),\ \Delta: 3x-4y-26=0$.

c. $C(3;-2),\ \Delta: 3x+4y-11=0$.

56. *Tính khoảng cách từ điểm* $M(4;-5)$ *đến các đường thẳng:*

a. $d: \begin{cases} x=4t \\ y=2+3t \end{cases}$

b. $d': \begin{cases} x=-1-2t \\ y=2+5t \end{cases}$.

57. *Tìm bán kính của đường tròn tâm* $C(-2;-2)$ *và tiếp xúc với đường thẳng* $\Delta: 5x+12y-10=0$.

58. *Đường thẳng* $\Delta: 2x-5y+9=0$ *cắt 2 trục tọa độ tại A, B. Tính chiều cao OH của* $\triangle OAB$.

59. *Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng song song:*

a. $\Delta_1: 48x+14y-21=0$ *và* $\Delta_2: 24x+7y-28=0$.

b. $\Delta_1: Ax+By+C=0$ *và* $\Delta_2: Ax+By+C'=0$.

60. *Tìm giá trị của m để khoảng cách từ* $A(1;1)$ *đến đường thẳng* $\Delta: mx+(2m-1)y-3=0$ *bằng 2.*

➢.Dạng ❷: Phương trình đường thẳng liên quan đến góc và khoảng cách.

- *Để tìm phân giác trong AD của $\triangle ABC$, ta lập phương trình 2 cạnh AB, AC rồi tìm phương trình 2 đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC. Chọn đường phân giác trong tương ứng với 2 điểm B, C nằm khác phía.*
- *Để tìm phương trình đường thẳng là tạp điểm cách đều hai đường thẳng (cắt nhau hoặc song song), cách đường thẳng cho trước một đoạn không đổi, ta gọi $M(x;y)$ thỏa điều kiện rồi dùng quan hệ khoảng cách để lập phương trình.*

61. *Viết phương trình các đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng:*
a. $\Delta_1: 2x+4y+7=0$ *và* $\Delta_2: x-2y-3=0$.
b. $\Delta_1: x=0$ *và* $\Delta_2: y=0$.
62. *Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai đường thẳng:*
a. $\Delta_1: 5x+3y-3=0$ *và* $\Delta_2: 5x+3y+7=0$.
b. $\Delta_1: 4x-3y+2=0$ *và* $\Delta_2: y-3=0$.
63. *Tìm quỹ tích các điểm cách đường thẳng* $\Delta: -2x+5y-1=0$ *một khoảng cách bằng 3.*
64. *Viết phương trình đường thẳng song song và cách đường thẳng* $\Delta: ax+by+c=0$ *một khoảng bằng h cho trước.*
65. *Viết phương trình của đường thẳng đi qua gốc tọa độ và cách đều hai điểm* $A(2;2)$ *và* $B(4;0)$.
66. *Viết phương trình đường thẳng qua* $P(10;2)$ *và cách đều hai điểm* $A(3;0)$ *và* $B(-5;4)$.
67. *Cho hai điểm* $A(1;1)$ *và* $B(3;6)$. *Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng 2.*
68. *Cho* $\triangle ABC$ *có* $A(2;6)$, $B(-3;-4)$ *và* $C(5;0)$. *Viết phương trình các phân giác AD, BE.*
69. *Viết phương trình phân giác d của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng* $d_1: x-2y-5=0$ *và* $d_2: 2x-y+2=0$.
70. *Viết phương trình các đường phân giác trong và ngoài xuất phát từ đỉnh A của* $\triangle ABC$ *biết* $A(1;1)$, $B(10;13)$ *và* $C(13;6)$.
71. *Biết các cạnh của* $\triangle ABC$ *có phương trình* $AB: x-y+4=0$, $BC: 3x+5y+4=0$ *và* $AC: 7x+y-12=0$.
a. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.
b. Hãy cho biết gốc tọa độ O nằm trong hay nằm ngoài $\triangle ABC$.

72. *Cho điểm* $M(2;5)$ *và đường thẳng* $d: x+2y-2=0$.
a. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua d.
b. Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua M.
73. *Viết phương trình đường thẳng qua* $A(-2;0)$ *và tạo bởi đường thẳng* $d: x+3y-3=0$ *một góc* 45^o.
74. *Cho hình vuông ABCD có tâm* $I(4;-1)$ *và phương trình cạnh* $AB: x+2y-1=0$. *Lập phương trình hai đường chéo của hình vuông.*
75. *Viết phương trình đường thẳng đường thẳng d đi qua* $P(3;1)$ *và cắt 2 đường thẳng* $\Delta_1: x+2y-3=0$, $\Delta_2: 3x-y+2=0$ *tại A, B sao cho d tạo với* Δ_1, Δ_2 *thành một tam giác cân có đáy là đường thẳng AB.*
76. *Cho* $\triangle ABC$ *cân tại A, biết phương trình đường thẳng* $AB: x+2y-1=0$ *và* $BC: 3x-y+5=0$. *Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng đường thẳng AC đi qua điểm* $M(1;-3)$.

❸. BÀI TẬP TỔNG HỢP

77. *Tìm điểm M trên đường thẳng* $d: x-y+2=0$, *cách đều hai điểm* $E(0;4)$ *và* $F(4;-9)$.
78. *Cho đường thẳng* $\Delta: \begin{cases} x=-2-2t \\ y=1+2t \end{cases}$ *và điểm* $M(3;1)$.
a. Tìm điểm A trên Δ *sao cho A cách M một khoảng bằng* $\sqrt{13}$.
b. Tìm điểm B trên Δ *sao cho đoạn MB ngắn nhất.*
79. *Cho hai điểm* $A(3;-1)$, $B(-1;-2)$ *và đường thẳng* $d: x+2y+1=0$.
a. Tìm tọa độ điểm C trên d sao cho ΔABC *cân tại C.*
b. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho ΔAMB *vuông tại M.*
80. *Cho hai điểm* $P(1;6)$, $Q(-3;-4)$ *và đường thẳng* $\Delta: 2x-y-1=0$. *Tìm tọa độ điểm N trên* Δ *sao cho* $|NP-NQ|$ *lớn nhất.*
81. *Cho điểm* $P(1;2)$ *và* $Q(3;4)$. *Tìm điểm M trên trục hoành sao cho* $MP+MQ$ *bé nhất.*
82. *Chứng tỏ rằng họ đường thẳng* $(m+1)x-2(m-1)y+3=0$ *luôn đi qua một điểm cố định.*
83. *Cho đường thẳng* $\Delta_m: (m-2)x+(m-1)y+2m-1=0$ *và điểm* $A(2;3)$. *Tìm M để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng* Δ_m *là lớn nhất.*
84. *Cho điểm* $M(4;6)$. *Viết phương trình của đường thẳng đi qua M và cắt các trục Ox, Oy theo thứ tự tại* $A(a,0)$ *và* $B(0,b)$ *với* $a,b>0$ *sao cho:*
a. $S_{\triangle OAB}=60$. *b. M là trung điểm của AB.* *c.* $S_{\triangle OAB}$ *bé nhất.*
85. *Cho đường thẳng* $\Delta: x-y+2=0$ *và điểm* $A(2;0)$.
a. Chứng tỏ rằng hai điểm A và gốc O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

Tìm điểm O' đối xứng với O qua Δ.
b. Tìm điểm M trên Δ sao cho độ dài của đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất.
86. *Các cạnh của $\triangle ABC$ được cho bởi $AB: x+y=4$, $BC: 3x-y=0$ và $AC: x-3y-8=0$.*
a. Tính các góc của $\triangle ABC$.
b. Tính chu vi và diện tích $\triangle ABC$.
c. Tính độ dài các bán kính r, R của đường tròn nộ tiếp và đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

❹. ĐỀ THI TUYỂN SINH

87. (ĐH KHỐI D-2009) *Cho $\triangle ABC$, $M(2;0)$ là trung điểm của AB. Đường trung tuyến và đường cao kẻ từ A lần lượt có phương trình: $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$.*
Viết phương trình đường thẳng AC.

(ĐS: $AC: 3x-4y+5=0$)

88. (ĐH KHỐI A-2009) *Cho hình chữ nhật ABCD có $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB. Trung điểm E của cạnh CD nằm trên đường thẳng $x+y-5=0$. Viết phương trình cạnh AB.*

(ĐS: $AB: y=5; x-4y+19=0$)

89. (CĐSP HN-2005) *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CD có phương trình tương ứng là $2x+y+1=0;\ x+y-1=0$. Hãy viết phương trình đường thẳng BC.*

(ĐS: $BC: 4x+3y+4=0$)

90. (CĐ BTRE-2005) *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, biết đỉnh $A(4;-1)$, phương trình một đường cao, một đường trung tuyến vẽ từ cùng một đỉnh lần lượt là $2x-3y+12=0;\ 2x+3y=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác.*

(ĐS: $AB: 3x+7y-5=0$, $AC: 3x+2y-10=0$, $BC: 9x+11y+5=0$).

91. (ĐH HPHÒNG-2004) *Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x-y+1=0$; $d_2: 2x+y-1=0$ và điểm $P(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng qua P và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho P là trung điểm của AB.*

(ĐS: $AB: 4x-y-7=0$)

92. (CĐSP VLONG-2005) *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ với $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến xuất phát từ B và C lần lượt có phương trình là $x-2y+1=0$ và $y-1=0$. Lập phương trình các cạnh của $\triangle ABC$.*

(ĐS: $AB: x-y+2=0, BC: x-4y+1=0, AC: x+2y-7=0$)

93. (ĐH KHỐI B-2008) *Cho $\triangle ABC$, biết hình chiếu vuông góc của C trên AB là $H(-1;1)$. Đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$, đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.*

(ĐS: $C\left(\frac{-10}{3};\frac{3}{4}\right)$)

94. (CĐ KHỐI A-2009) *Cho $\triangle ABC$ có $C(-1;-2)$. Đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x+y-9=0$ và $x+3y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B.*

(ĐS: $A(1;4),B(5;0)$)

95. (ĐH KHỐI A-2004) *Trong mặt phẳng Oxy cho $A(0;2)$ và $B(\sqrt{3};-1)$. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OAB$.*

(ĐS: $I(-\sqrt{3};1),H(\sqrt{3};1)$)

96. (ĐH KHỐI B-2004) *Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1)$, $B(4;-3)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc đường thẳng $d:x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ C đến AB bằng 6.*

(ĐS: $C(7;3),C\left(\frac{-43}{11};\frac{-27}{11}\right)$)

97. (ĐH KHỐI B-2007) *Trên mặt phẳng tọa độ cho điểm $A(2;2)$ và hai đường thẳng $d_1:x+y-2=0$, $d_2:x+y-8=0$. Tìm B, C tương ứng trong d_1,d_2 sao cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A.*

(ĐS: $B(3;-1),C(5;3)$; $B(-1;3),C(3;5)$)

98. (ĐH KHỐI A-2006) *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các đường thẳng $d_1:x+y+3=0$, $d_2:x-y-4$ và $d_3:x-2y=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d_3 sao cho khoảng cách từ M đến d_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến d_2.*

(ĐS: $M(-22;-11),M(2;1)$)

99. (ĐH KHỐI A-2005) *Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng $d_1:x-y=0$ và $d_2:2x+y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết A thuộc d_1, C thuộc d_2, còn B, D thuộc trục hoành.*

(ĐS: $A(1;1),C(1;-1)$ $B(0;0),D(2;0)$; $B(2;0),D(0;0)$)

100. (ĐH KHỐI B-2009) *Cho $\triangle ABC$ đỉnh $A(1;4)$, hai đỉnh B, C nằm trên đường thẳng $\Delta:x-y-4=0$. Biết rằng diện tích $\triangle ABC$ bằng 18. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.*

(ĐS: $B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right),C\left(\frac{3}{2};\frac{-5}{2}\right)$; $B\left(\frac{3}{2};\frac{-5}{2}\right),C\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$)

-----------------HẾT-------------

Tài liệu lưu hành nội bộ – Nguyễn Văn Rin - ĐHSP Huế.
Rinnguyen1991@gmail.com