ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ THU HÀ

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH BẰNG PHƯƠNG PHÁP VÉCTƠ TRONG CHƯƠNG TRÌNH HÌNH HỌC 10 (CHƯƠNG I, II - HÌNH HỌC 10 - SÁCH GIÁO KHOA NÂNG CAO)

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

THÁI NGUYÊN -2007

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ THU HÀ

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH BẰNG PHƯƠNG PHÁP VÉCTƠ TRONG CHƯƠNG TRÌNH HÌNH HỌC 10 (CHƯƠNG I, II - HÌNH HỌC 10 - SÁCH GIÁO KHOA NÂNG CAO)

Chuyên ngành: Lý luận và phương pháp dạy học toán
Mã số: 60.14.10

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

Người hướng dẫn khoa học :
TS. NGUYỄN NGỌC UY

THÁI NGUYÊN - 2007

Lời cám ơn

Em xin bày tỏ lòng biêt ơn sâu sắc đến thầy giáo - TS. Nguyễn Ngọc Uy, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ em trong suốt qúa trình thực hiện đề tài.

Em xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong tổ : Phương pháp giảng dạy toán, Khoa Toán - Tin trường Đại Học Sư Phạm Hà Nội, các thầy cô giáo trong khoa Toán- Tin Trường Đại Học Sư Phạm - Đại Học Thái Nguyên trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Em xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, Khoa sau đại học trường Đại Học Sư Phạm - Đại Học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để em hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu và các bạn đồng nghiệp ở trường THPT Bỉm Sơn - Thanh Hóa đã động viên, giúp đỡ tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập và nghiên cứu của mình.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2007

Lê Thị Thu Hà

NHỮNG CỤM TỪ VIẾT TẮT TRONG LUẬN VĂN

Học sinh	HS
Hình học	HH
Phương pháp véctơ	PPVT
Sách giáo khoa	SGK
Sách bài tập	SBT
Trung học phổ thông	THPT

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

1.Lý do chọn đề tài

Trong giai đoạn hiện nay, khi khoa học công nghệ có những bước tiến nhảy vọt, việc đào tạo những con người không chỉ nắm vững kiến thức mà còn có năng lực sáng tạo, có ý nghĩa quan trọng đối với tiềm lực khoa học kĩ thuật của đất nước.

Nghị quyết hội nghị lần thứ IV Ban chấp hành trung ương Đảng Cộng Sản Việt Nam (khóa VII, 1993) đã chỉ rõ:

"Mục tiêu giáo dục - đào tạo phải hướng vào đào tạo những con người lao động, tự chủ, sáng tạo, có năng lực giải quyết những vấn đề thường gặp, qua đó mà góp phần tích cực thực hiện mục tiêu lớn của đất nước là dân giàu, nước mạnh, xã hội công bằng, dân chủ, văn minh."

Nghị quyết hội nghị lần thứ II Ban chấp hành trung ương Đảng Cộng Sản Việt Nam (khóa VIII, 1997), tiếp tục khẳng định:

"Phải đổi mới phương pháp giáo dục đào tạo, khắc phục lối truyền thụ một chiều, rèn luyện thành nếp tư duy sáng tạo của người học. Từng bước áp dụng phương pháp tiên tiến và phương tiện hiện đại vào quá trình dạy học, đảm bảo điều kiện và thời gian tự học, tự nghiên cứu cho học sinh, nhất là sinh viên đại học".

Như vậy, quan điểm chung về đổi mới phương pháp dạy học đã khẳng định, cốt lõi của việc đổi mới phương pháp dạy học môn toán ở trường THPT là làm cho học sinh học tập tích cực, chủ động, chống lại thói quen học tập thụ động.

Trong việc đổi mới phương pháp dạy học môn toán ở trường THPT, việc dạy giải bài tập toán ở trường phổ thông có vai trò quan trọng vì:

.Dạy toán ở trường phổ thông là dạy hoạt động toán học. Việc giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học, giúp học sinh phát triển tư duy, tính sáng tạo. Hoạt động giải bài tập toán là điều kiện để thực hiện các mục đích dạy học toán ở trường phổ thông. Dạy giải bài tập toán cho học sinh có tác dụng phát huy tính chủ động sáng tạo, phát triển tư duy, gây hứng thú cho học tập cho học sinh, yêu cầu học sinh có kỹ năng vận dụng kiến thức vào tình huống mới, có khả năng phát hiện và giải quyết vấn đề, có năng lực độc lập suy nghĩ, sáng tạo trong tư duy và biết lựa trọn phương pháp tự học tối ưu.

Thực tiễn dạy học cho thấy: Việc sử dụng phương pháp véctơ trong nghiên cứu hình học, học sinh có thêm những công cụ mới để diễn đạt, suy luận để giải toán, tránh được ảnh hưởng không có lợi của trực giác. Đây cũng là dịp tốt để học sinh làm quen với ngôn ngữ toán học cao cấp. Thế nhưng việc sử dụng không thành thạo phương pháp trên đã làm học sinh gặp nhiều khó khăn và lúng túng, hạn chế tới kết quả học tập.

Với những lí do trên, tôi chọn đề tài nghiên cứu là "Rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh bằng phương pháp véctơ, trong chương trình hình học 10” (Chương I,II - Hình học 10 - Sách giáo khoa nâng cao).

2. Giả thuyết khoa học

Nếu hướng dẫn học sinh cách tìm lời giải bài toán theo 4 bước trong lược đồ của Pôlya và xây dựng được hệ thống bài tập nhằm rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh bằng PPVT trong chương trình hình học 10, đồng thời có các biện pháp sư phạm phù hợp thì sẽ góp phần phát triển năng lực giải toán cho học sinh. Giúp học sinh khắc sâu kiến thức đã học, phát huy tính chủ động, tính tích cực trong việc tiếp thu kiến thức mới góp phần nâng cao chất lượng dạy và học ở trường THPT.

3. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu việc vận dụng bốn bước giải bài tập toán theo lược đồ của Pôlya vào giải bài tập theo PPVT, nhằm rèn luyện kỹ năng giải bài toán hình học phẳng bằng PPVT, qua đó phát triển năng lực giải toán cho học sinh.

Đồng thời đề xuất một số biện pháp dạy học nhằm nâng cao năng lực giải toán cho học sinh THPT.

4. Nhiệm vụ nghiên cứu

- Nghiên cứu cơ sở lý luận và thực tiễn của vấn đề được nghiên cứu.

- Xây dựng hệ thống bài tập nhằm rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh bằng PPVT trong chương trình hình học 10, góp phần đổi mới phương pháp dạy và học tập ở trường phổ thông.

- Thử nghiệm sư phạm để kiểm nghiệm tính khả thi của đề tài.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp nghiên cứu lý luận:

+ Nghiên cứu một số tài liệu về lý luận dạy học, giáo dục học, tâm lý học, nghiên cứu SGK của chương trình THPT, các giáo trình về phương pháp giảng dạy toán.

+ Nghiên cứu sách báo, tạp chí liên quan đến dạy và học hình học phẳng bằng PPVT.

- Phương pháp nghiên cứu thực tiễn:

+ Tổng kết kinh nghiệm quá trình công tác của bản thân, học tập và tiếp thu kinh nghiệm của đồng nghiệp. Trao đổi trực tiếp với học sinh, giáo viên giảng dạy để tìm ra những khó khăn vướng mắc của học sinh khi giải bài tập về chủ đề này và tìm biện pháp khắc phục.

- Phương pháp thử nghiệm sư phạm.

6. Bố cục luận văn

Mở đầu.

Chương 1. Cơ sở lý luận và thực tiễn trong việc dạy học giải bài tập bằng PPVT.

Chương 2. Xây dựng hệ thống bài tập hình học 10 theo hướng rèn luyện kỹ năng giải toán bằng PPVT.

Chương 3. Thử nghiệm sư phạm

Kết luận.

Tài liệu tham khảo

CHƯƠNG 1. CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN TRONG VIỆC DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP BẰNG PPVT

1.1 Lý luận về dạy học giải bài tập toán.

1.1.1 Mục đích, vai trò, ý nghĩa của bài tập toán trong trường phổ thông

Pôlya cho rằng "Trong toán học, nắm vững bộ môn toán quan trọng hơn rất nhiều so với một kiến thức thuần túy mà ta có thể bổ sung nhờ một cuốn sách tra cứu thích hợp. Vì vậy cả trong trường trung học cũng như trong các trường chuyên nghiệp, ta không chỉ truyền thụ cho học sinh những kiến thức nhất định, mà quan trọng hơn nhiều là phải dạy cho họ đến một mức độ nào đó nắng vững môn học. Vậy thế nào là muốn nắm vững môn toán ? Đó là biết giải toán" [25, tr.82].

a. Mục đích: Một trong những mục đích dạy toán ở trường phổ thông là:

Phát triển ở học sinh những năng lực và phẩm chất trí tuệ, giúp học sinh biến những tri thức khoa học của nhân loại được tiếp thu thành kiến thức của bản thân, thành công cụ để nhận thức và hành động đúng đắn trong các lĩnh vực hoạt động cũng như trong học tập hiện nay và sau này.

Làm cho học sinh nắm được một cách chính xác, vững chắc và có hệ thống những kiến thức và kỹ năng toán học phổ thông cơ bản, hiện đại, phù hợp với thực tiễn và có năng lực vận dụng những tri thức đó vào những tình huống cụ thể, vào đời sống, vào lao động sản xuất, vào việc học tập các bộ môn khoa học khác.

b. Vai trò: Toán học có vai trò lớn trong đời sống, trong khoa học và công nghệ hiện đại, kiến thức toán học là công cụ để học sinh học tốt các môn học khác, giúp học sinh hoạt động có hiệu quả trong mọi lĩnh vực. Các-Mác nói "Một khoa học chỉ thực sự phát triển nếu nó có thể sử dụng được phương pháp của toán học"[5, tr.5].

Môn toán có khả năng to lớn giúp học sinh phát triển các năng lực trí tuệ như: phân tích, tổng hợp, so sánh, đặc biệt hóa, khái quát hóa...Rèn luyện những phẩm chất, đức tính của người lao động mới như: tính cẩn thận, chính xác, tính kỷ luật, khoa học, sáng tạo....

c. Ý nghĩa:

Ở trường phổ thông giải bài tập toán là hình thức tốt nhất để củng cố, hệ thống hóa kiến thức và rèn luyện kỹ năng, là một hình thức vận dụng kiến thức đã học vào những vấn đề cụ thể, vào thực tế, vào những vấn đề mới, là hình thức tốt nhất để giáo viên kiểm tra về năng lực, về mức độ tiếp thu và khả năng vận dụng kiến thức đã học.

Việc giải bài tập toán có tác dụng lớn trong việc gây hứng thú học tập cho học sinh nhằm phát triển trí tuệ và góp phần giáo dục, rèn luyện con người học sinh về nhiều mặt.

Việc giải một bài toán cụ thể không những nhằm một dụng ý đơn nhất nào đó mà thường bao hàm ý nghĩa nhiều mặt như đã nêu ở trên.

1.1.2 Vị trí và chức năng của bài tập toán

a. Vị trí: "Ở trường phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động toán học. Đối với học sinh có thể xem giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học. Các bài tập toán ở trừơng phổ thông là một phương tiện rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kĩ năng kĩ xảo, ứng dụng toán học vào thực tiễn. Hoạt động giải bài tập toán là điều kiện để thực hiện tốt các nhiệm vụ dạy học toán ở trường phổ thông. Vì vậy, tổ chức có hiệu quả việc dạy giải bài tập toán học có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy học toán".[13, tr.201].

b. Các chức năng của bài tập toán.

Mỗi bài tập toán đặt ra ở một thời điểm nào đó của quá trình dạy học đều chứa đựng một cách tường minh hay ẩn tàng những chức năng khác nhau. Các chức năng đó là:

- Chức năng dạy học.
- Chức năng giáo dục.
- Chức năng phát triển.
- Chức năng kiểm tra.

Các chức năng đều hướng tới việc thực hiện các mục đích dạy học:

- Chức năng dạy học: Bài tập toán nhằm hình thành củng cố cho học sinh những tri thức, kĩ năng, kĩ xảo ở các giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học.
- Chức năng giáo dục: Bài tập toán nhằm hình thành cho học sinh thế giới quan duy vật biện chứng, hứng thú học tập, sáng tạo, có niền tin và phẩm chất đạo đức của người lao động mới.
- Chức năng phát triển: Bài tập toán nhằm phát triển năng lực tư duy cho học sinh, đặc biệt là rèn luyện những thao tác trí tụê hình thành những phẩm chất của tư duy khoa học.
- Chức năng kiểm tra: Bài tập toán nhằm đánh giá mức độ kết quả dạy và học, đánh giá khả năng độc lập học toán, khả năng tiếp thu, vận dụng kiến thức và trình độ phát triển của học sinh.

Hiệu quả của việc dạy toán ở trường phổ thông phần lớn phụ thuộc vào việc khai thác và thực hiện một cách đầy đủ các chức năng có thể có của các tác giả viết sách giáo khoa đã có dụng ý đưa vào chương trình. Người giáo viên phải có nhiệm vụ khám phá và thực hiện dụng ý của tác giả bằng năng lực sư phạm của mình.

1.1.3 Dạy học phương pháp giải bài toán.

Trong môn toán ở trường phổ thông có nhiều bài toán chưa có hoặc không có thuật giải và cũng không có một thuật giải tổng quát nào để giải tất cả các bài toán. Chúng ta chỉ có thể thông qua việc dạy học giải một số bài toán cụ thể mà dần dần truyền thụ cho học sinh cách thức, kinh nghiệm trong việc suy nghĩ, tìm tòi lời giải cho mỗi bài toán.

Dạy học giải bài tập toán không có nghĩa là giáo viên cung cấp cho học sinh lời giải bài toán. Biết lời giải của bài toán không quan trọng bằng làm thế nào để giải được bài toán. Để làm tăng hứng thú học tập của học sinh, phát triển tư duy, thầy giáo phải hình thành cho học sinh một quy trình chung, phương pháp tìm lời giải cho một bài toán.

Theo Pôlya, phương pháp tìm lời giải cho một bài toán thường được tiến hành theo 4 bước sau:

Bước 1: Tìm hiểu nội dung bài toán.

Để giải được một bài toán, trước hết phải hiểu bài toán đó và có hứng thú với việc giải bài toán đó. Vì thế người giáo viên phải chú ý gợi động cơ, kích thích trí tò mò, hứng thú cho học sinh và giúp các em tìm hiểu bài toán một cách tổng quát. Tiếp theo phải phân tích bài toán đã cho:

-Đâu là ẩn, đâu là dữ kiện.

-Vẽ hình, sử dụng các kí hiệu thích hợp (nếu cần).

-Phân biệt các thành phần khác nhau của điều kiện, có thể diễn đạt các điều kiện đó dưới dạng công thức toán học được không?

Bước 2: Xây dựng chương trình giải.

"Phải phân tích bài toán đã cho thành nhiều bài toán đơn giản hơn. Phải huy động những kiến thức đã học(định nghĩa, định lí, quy tắc...) có liên quan đến những điều kiện, những quan hệ trong đề toán rồi lựa chọn trong số đó những kiến thức gần gũi hơn cả với dữ kiện của bài toán rồi mò mẫm, dự đoán kết quả. Xét vài khả năng có thể xảy ra, kể cả trường hợp đặc biệt. Sau đó, xét một bài toán tương tự hoặc khái quát hóa bài toán đã cho"[13, tr.210].

Bước 3: Thực hiện chương trình giải.

Bước 4: Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.

- Kiểm tra lại kết quả, xem lại các lập luận trong quá trình giải.
- Nhìn lại toàn bộ các bước giải, rút ra tri thức phương pháp để giải một loại bài toán nào đó.

-Tìm thêm các cách giải khác (nếu có thể).

-Khai thác kết quả có thể có của bài toán.

-Đề xuất bài toán tương tự, bài toán đặc biệt hoặc khái quát hóa bài toán.

Công việc kiểm tra lời giải của một bài toán có ý nghĩa quan trọng. Trong nhiều trường hợp, sự kết thúc của bài toán này lại mở đầu cho một bài toán khác. Vì vậy "Cần phải luyện tập cho học sinh có một thói quen kiểm tra lại bài toán, xét xem có sai lầm hay thiếu sót gì không, nhất là những bài toán có đặt điều kiện hoặc bài toán đòi hỏi phải biện luận. Việc kiểm tra lại lời giải yêu cầu học sinh thực hiện một cách thường xuyên" [13, tr.212].

Sau đây là ví dụ sử dụng 4 bước giải bài toán của Polya để chứng minh

<u>Ví dụ</u>: (Bài 89-tr 52- SBT HH10 - Nâng cao)

Cho điểm M nằm trong đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ các đường thẳng MA, MB, MC, chúng cắt đường tròn đó lần lượt ở A', B', C'.Chứng minh rằng $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{\left(R^2 - MO^2\right)^3}{(MA.MB.MC)^2}$ *(*)*

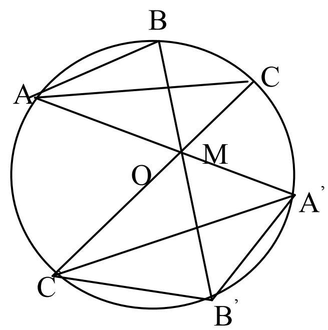
<u>Giải:</u>

<u>Bước 1</u>: Tìm hiểu bài toán

Gv: Nhận xét 2 vế của đẳng thức (*)

Hs: -Vế trái chứa các yếu tố diện tích $S_{A'B'C'}$, S_{ABC}.

-Vế phải chứa các yếu tố về $\Pi_{M/(O)}$; về tích độ dài các cạnh MA, MB, MC. Ta có:



$\Pi_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC'} = MO^2 - R^2$

<u>Bước 2</u>: Xây dựng chương trình giải

Gv: Để biến đổi vế trái thành vế phải, phải sử dụng công thức tính diên tích tam giác nào để chuyển dần từ yếu tố diện tích sang yếu tố độ dài ?

Hs: $S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}$; $S_{A'B'C'} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R}$;

Gv: Để chuyển dần từ yếu tố độ dài các cạnh của tam giác ABC, tam giác A'B'C' về độ dài cạnh MA, MB, MC, $\Pi_{M/(O)}$ thì phải làm gì ?

Hs: Phải tìm mối liên hệ giữa chúng bằng cách xét các tam giác đồng dạng:

$$\Delta MAB \sim \Delta MB'A' \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{MA'}{MB} = \frac{MA.MA'}{MA.MB}$$

(MA.MA'= $|\Pi_{M/(O)}| = R^2 - MO^2$)

Làm tương tự với $\frac{B'C'}{BC}, \frac{C'A'}{CA}$, khi đó (*) được chứng minh.

Bước 3: Trình bày lời giải

-Hs: $S_{A'B'C'} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R}; S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA} (**)$$

Mặt khác: $\Delta MAB \sim \Delta MB'A'$ nên:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{MA'}{MB} = \frac{MA.MA'}{MA.MB} = \frac{|\rho_{M/(O)}|}{\mathrm{MA.MB}} = \frac{R^2 - MO^2}{MA.MB}$$

Tương tự $\frac{B'C'}{BC} = \frac{R^2 - MO^2}{MB.MC}; \frac{C'A'}{CA} = \frac{R^2 - MO^2}{MC.MA}$ (***)

Thay (***) vào (**) ta được điều phải chứng minh.

Bước 4: Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.

Gv: Bài toán trên còn cách giải nào khác không ?

Hs: Có thể chứng minh vế phải bằng vế trái bằng cách sử dụng công thức tính $\Pi_{M/(O)}$, sử dụng các tam giác đồng dạng để chuyển dần từ yếu tố độ dài các cạnh, $\Pi_{M/(O)}$ về yếu tố diện tích tam giác A'B'C' và diện tích tam giác ABC.

Ví dụ này đã cung cấp cho học sinh một số kỹ năng vận dụng công thức tính phương tích của một điểm đối với một đường tròn và làm bài tập hình học.

1.1.4 Bồi dưỡng năng lực giải toán.

Bài tập toán nhằm phát triển tư duy cho học sinh, đặc biệt là rèn luyện các thao tác trí tuệ. Vì vậy, trong quá trình dạy học người thầy giáo phải chú trọng bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh. Năng lực giải toán là khả năng thực hiện 4 bước trong phương pháp tìm lời giải bài toán của Pôlya.

Rèn luyện năng lực giải toán cho học sinh chính là rèn luyện cho họ khả năng thực hiện bốn bước theo phương pháp tìm lời giải bài toán của Pôlya. Điều này cũng phù hợp với phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề theo xu hướng đổi mới phương pháp dạy học của nền giáo dục nước ta hiện nay.

Một điểm đáng chú ý nữa là: "Trong quá trình giải bài tập toán, cần khuyến khích học sinh tìm nhiều cách giải cho một bài toán. Mọi cách giải đều dựa vào một số đặc điểm nào đó của dữ kiện, cho nên tìm được nhiều cách giải là luyện tập cho học sinh biết cách nhìn nhận một vấn đề theo nhiều khía cạnh khác nhau, điều đó rất bổ ích cho việc phát triển năng lực tư duy. Mặt khác, tìm được nhiều cách giải thì sẽ tìm được cách giải hay nhất, đẹp nhất..."[13, tr.214].

Ví dụ 1: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. chứng minh rằng:

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$ (1)

Để giải bài toán này, học sinh thường nghĩ đến cách dùng các phép toán về véc tơ để chứng minh vế phải bằng vế trái và có lời giải như sau:

Lời giải 1: Ta có (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BE}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EF}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$$

Vậy đẳng thức (1) được chứng minh

Lời giải 2: Biến đổi vế trái

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$$

$$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}$$

$$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$$

(Vì $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FF}=\overrightarrow{O}$)

Lời giải 3: Biến đổi vế phải:

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}$$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$$

(Vì $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{O}$)

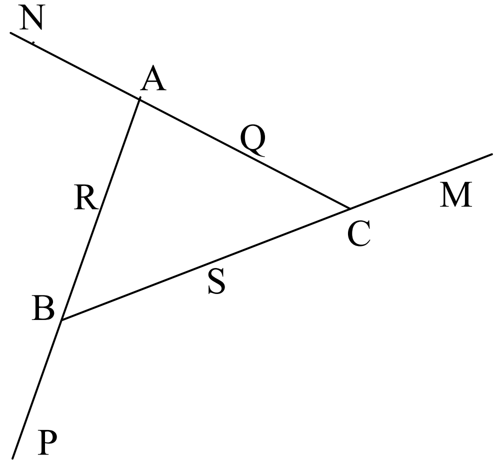
***Nhận xét*:** Trong 3 lời giải trên cho thấy lời giải thứ nhất là đơn giản nhất, chỉ cần biến đổi đẳng thức véctơ cần chứng minh tương đương với một đẳng thức véctơ được công nhận là đúng.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là những điểm được xác định như sau:

$\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{NA},\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PB}$. Chứng minh hai tam giác ABC và tam giác MNP có cùng trọng tâm.

Để giải bài toán này học sinh thường nghĩ đến cách chứng minh tính chất trọng tâm của tam giác và có lời giải như sau:

Lời giải 1: Gọi S, Q, R lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB



$$\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$$
$$\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{NA}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CQ}$$
$$\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PB}\Rightarrow\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{RB}=\overrightarrow{QS}$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$. Ta có:

$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{GA}+$$
$$+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BP}$$
$$=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QS}\right)$$
$$=\overrightarrow{O}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{O}$$

Vậy G là trọng tâm của tam giác MNP

<u>Lời giải 2:</u>

-Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$

-Gọi G' là trọng tâm của tam giác MNP thì $\overrightarrow{G'M}+\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'P}=\overrightarrow{O}$ Ta có:

$$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NG'}$$
$$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PG'}$$
$$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MG'}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}\right)+\left(\overrightarrow{NG'}+\overrightarrow{PG'}+\overrightarrow{MG'}\right)$$
$$=\overrightarrow{O}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{O}$$
$$\Rightarrow G\equiv G'$$

Vậy tam giác ABC, tam giác MNP có cùng trọng tâm.

<u>Lời giải 3:</u>

Gọi G là trọng tâm của tam giác MNP thì $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{O}$

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}$

$$=\left(\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GM}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)$$
$$=\overrightarrow{O}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{O}=\overrightarrow{O}$$

Suy ra G là trọng tâm là tam giác ABC.

<u>Nhận xét</u>: Trong 3 lời giải nêu trên, lời giải thứ 3 là ngắn gọn nhất và tự nhiên nhất, vì nó vận dụng tính chất trọng tâm của tam giác để chứng minh.

Trong quá trình tìm lời giải bài toán theo bảng gợi ý của Pôlya rất có hiệu quả, nó đặt học sinh trước những ý nghĩ tích cực, chẳng hạn như:

- Bạn đã gặp bài toán này lần nào chưa ? Hay bạn đã gặp bài toán này ở dạng hơi khác ?

- Bạn có biết bài toán nào có liên quan không ? Có thể dùng định lý hay công thức nào để giải nó ?

- Có thể sử dụng kết quả của bài toán khác vào việc giải bài toán này hay không? có thể đưa ra một bài toán tương tự hoặc một bài toán tổng quát hơn bài toán đã cho không ?...

1.2 Kỹ năng giải toán và vấn đề rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh

1.2.1 Kỹ năng

"Kỹ năng là khả năng vận dụng tri thức khoa học vào thực tiễn. Trong đó, khả năng được hiểu là: sức đã có (về một mặt nào đó) để thực hiện một việc gì"[3, tr.548].

Theo tâm lý học, kỹ năng là khả năng thực hiện có hiệu quả một hành động nào đó theo một mục đích trong những điều kiện xác định. Nếu tạm thời tách tri thức và kỹ năng để xem xét riêng từng các tri thức thuộc phạm vi nhận thức, thuộc về khả năng "biết", còn kỹ năng thuộc phạm vi hành động, thuộc về khả năng "biết làm".

Các nhà giáo dục học cho rằng: "Mọi kiến thức bao gồm một phần là thông tin kiến thức thuần túy và một phần là kỹ năng".

Kỹ năng là một nghệ thuật, là khả năng vận dụng những hiểu biết ở mỗi người để đạt được mục đích. Kỹ năng còn có thể được đặc trưng như một thói quen nhất định và cuối cùng kỹ năng là khả năng làm việc có phương pháp.

"Trong toán học, kỹ năng là khả năng giải các bài toán, thực hiện các chứng minh đã nhận được. Kỹ năng trong toán học quan trọng hơn nhiều so với kiến thức thuần túy, so với thông tin trơn".[25, tr.99].

Trong thực tế dạy học cho thấy, học sinh thường gặp khó khăn khi vận dụng kiến thức vào giải quyết các bài tập cụ thể là do: học sinh không nắm vững kiến thức các khái niệm, định lí, qui tắc, không trở thành cơ sở của kỹ năng. Muốn hình thành được kỹ năng, đặc biệt là kỹ năng giải toán cho học sinh, người thầy giáo cần phải tổ chức cho học sinh học toán trong hoạt động và bằng hoạt động tự giác, tích cực, sáng tạo để học sinh có thể nắm vững tri thức, có kỹ năng và sẵn sàng vận dụng vào thực tiễn. Góp phần thực hiện nguyên lý của nhà trường phổ thông là: "Học đi đôi với hành, giáo dục kết hợp với lao động sản xuất, nhà trường gắn liền với xã hội".

1.2.2 Kỹ năng giải toán.

"Kỹ năng giải toán là khả năng vận dụng các tri thức toán học để giải các bài tập toán (bằng suy luận, chứng minh)"[5, tr.12].

Để thực hiện tốt môn toán ở trong trường THPT, một trong những yêu cầu được đặt ra là:

"Về tri thức và kỹ năng, cần chú ý những tri thức, phương pháp đặc biệt là tri thức có tính chất thuật toán và những kỹ năng tương ứng. Chẳng hạn: tri thức và kỹ năng giải bài toán bằng cách lập phương trình, tri thức và kỹ năng chứng minh toán học, kỹ năng hoạt động và tư duy hàm..."[13, tr.41].

Cần chú ý là tùy theo nội dung kiến thức toán học mà có những yêu cầu rèn luyện kỹ năng khác nhau.

1.2.3 Đặc điểm của kỹ năng.

Khái niệm kỹ năng trình bày ở trên chúa đựng những đặc điểm sau:

- Bất cứ kỹ năng nào cũng phải dựa trên cơ sở lý thuyết đó là kiến thức. Bởi vì, cấu trúc của kỹ năng là: hiểu mục đích - biết cách thức đi đến kết quả - hiểu những điều kiện để triển khai cách thức đó.

- Kiến thức là cơ sở của kỹ năng, khi kiến thức đó phản ánh đầy đủ các thuộc tính bản chất của đối tượng, được thử nghiệm trong thực tiễn và tồn tại trong ý thức với tư cách là công cụ của hành động. Cùng với vai trò cơ sở của tri thức, cần thấy rõ tầm quan trọng của kỹ năng. Bởi vì: "Môn toán là môn học công cụ có đặc diểm và vị trí đặc biệt trong việc thực hiện nhiệm vụ phát triển nhân cách trong trường phổ thông".[13, tr.29].Vì vậy, cần hướng mạnh vào việc vận dụng những tri thức và rèn luyện kỹ năng, vì kỹ năng chỉ có thể được hình thành và phát triển trong hoạt động.

-Kỹ năng giải toán phải dựa trên cơ sở tri thức toán học, bao gồm: kiến thức, kỹ năng, phương pháp.

1.2.4 Sự hình thành kỹ năng

Sự hình thành kỹ năng là làm cho học sinh nắm vững một hệ thống phức tạp các thao tác nhằm biến đổi và làm sáng tỏ những thông tin chứa đựng trong các bài tập.

Vì vậy, muốn hình thành kỹ năng cho học sinh, chủ yếu là kỹ năng học tập và kỹ năng giải toán, người thầy giáo cần phải:

-Giúp học sinh hình thành một đường lối chung (khái quát) để giải quyết các đối tượng, các bài tập cùng loại.

-Xác lập được mối liên hệ giữa những bài tập khái quát và các kiến thức tương ứng.

Ví dụ: Khi rèn luyện kỹ năng chứng minh đẳng thức véc tơ, cần chú ý giúp học sinh nhận ra mối quan hệ giữa vế phải và vế trái của đẳng thức cần chứng minh.

Chẳng hạn:

1/ Cho 2 điểm A, B và hai số thực α, β sao cho $\alpha + \beta \neq O$

a.Chứng minh tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = O$

b.Chứng minh với mọi điểm M ta luôn có: $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta).\overrightarrow{MI}$

2/ Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q theo thứ tự là các trung điểm của AD, BC, DB, AC. Chứng minh:

a. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$

b. $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$

Những bài toán dạng này giúp học sinh củng cố kỹ năng sử dụng các tính chất của véc tơ, phép cộng véc tơ, phép trừ véc tơ, phép nhân véc tơ với một số thực, các quy tắc như quy tắc 3 điểm, quy tắc trung điểm...

Do đặc điểm, vai trò và vị trí của môn toán trong nhà trường phổ thông, theo lý luận dạy học môn toán cần chú ý:

“ Trong khi dạy học môn toán cần quan tâm rèn luyện cho học sinh những kỹ năng trên những bình diện khác nhau đó là:

-Kỹ năng vận dụng tri thức trong nội bộ môn toán

-Kỹ năng vận dụng tri thức toán học vào những môn học khác

-Kỹ năng vận dụng tri thức vào đời sống”[12, tr.19].

Theo quan điểm trên, truyền thụ tri thức, rèn luyện kỹ năng là nhiệm vụ quan trọng hàng đầu của bộ môn toán trong nhà trường phổ thông.

Rèn luyện kỹ năng toán học và kỹ năng vận dụng toán học vào thực tiễn mà trước tiên là kỹ năng giải toán cần đạt được các yêu cầu sau:

1/ Giúp học sinh hình thành nắm vững những mạch kiến thức cơ bản xuyên suốt chương trình phổ thông. Trong môn toán có thể kể tới các kiến thức sau:

- Các hệ thống số.
- Hàm số và ánh xạ.
- Phương trình và bất phương trình.
- Định nghĩa và chứng minh toán học.
- Ứng dụng toán học.

2/ Giúp học sinh phát triển các năng lực trí tuệ, cụ thể là:

- Tư duy logic và ngôn ngữ chính xác, trong đó có tư duy thuật toán.

- Khả năng suy đoán, tư duy trừu tượng và trí tưởng tượng không gian.
- Những thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp, khái quát hóa.
- Các phẩm chất trí tuệ như tư duy độc lập, tư duy linh hoạt và sáng tạo.

3/ Coi trọng việc rèn luyện kỹ năng tính toán trong tất cả giờ học toán, gắn với việc rèn luyện các kỹ năng thực hành như tính toán, biến đổi, vẽ hình, vẽ đồ thị.

4/ Giúp học sinh rèn luyện phẩm chất của người lao động mới như: Tính cẩn thận, chính xác, kiên trì, thói quen tự kiểm tra những sai lầm có thể gặp.

1.2.5 Một số kỹ năng cơ bản trong quy trình giải bài toán bằng phương pháp véctơ

Kỹ năng giải bài tập toán, đặc biệt về giải toán véctơ bao gồm một hệ thống các thao tác trí tuệ và thực hành để vận dụng tri thức (kiến thức, phương pháp) vào việc giải các bài tập khác nhau đạt được một số yêu cầu của chủ đề giải bài tập về véctơ trong chương trình Hình Học 10.

Trong quy trình giải 1 bài tập toán bằng phương pháp véc tơ, có những kỹ năng cơ bản sau:

- Chuyển bài toán sang ngôn ngữ véc tơ.
- Phân tích 1 véc tơ thành một tổ hợp véc tơ.
- Kỹ năng ghép 1 số véctơ trong 1 tổ hợp véctơ.
- Khái quát hóa 1 số những kết quả để vận dụng vào bài toán tổng quát hơn.

*Đây là những khâu mấu chốt trong phương pháp giải toán bằng công cụ véctơ.

1.2.5.1 Diễn đạt quan hệ hình học bằng ngôn ngữ véc tơ

- Cần rèn luyện cho học sinh kỹ năng chuyển tương đương những quan hệ hình học từ cách nói thông thường sang dạng véc tơ để có thể vận dụng công cụ véctơ vào giải toán.

***Ví dụ**:* Từ quan hệ hình học "Ba điểm A, B, C thẳng hàng” được diễn tả bằng kiến thức véc tơ là:

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$ với O tùy ý và $k+m = 1$.

- Từ quan hệ hình học “Hai điểm B, C trùng nhau” được diễn tả bằng kiến thức véctơ là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

- Từ quan hệ hình học "Hai đường thẳng song song AB// CD”được diễn tả bằng kiến thức véc tơ là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

- Từ quan hệ hình học "Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỷ số k $\neq$ 1” được diễn tả bằng kiến thức véc tơ là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

- Từ quan hệ hình học "AM là trung tuyến của ΔABC”được diễn tả bằng kiến thức véc tơ là $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

- Từ quan hệ hình học "G là trọng tâm ΔABC” Được diễn tả bằng kiến thức véc tơ là $\overleftarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$.

- Từ quan hệ hình học "Hai đường thẳng vuông góc AB$\perp$CD” Được diễn tả bằng kiến thức véc tơ là $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = O$...

Như vậy, việc chuyển bài toán sang ngôn ngữ véctơ là điểm xuất phát trong việc sử dụng công cụ véctơ để giải toán.

1.2.5.2 Phân tích 1 véc tơ thành một tổ hợp véctơ

Một khâu mấu chốt khác nữa mà ta cần rèn luyện cho học sinh là kỹ năng phân tích 1 véctơ thành 1 tổ hợp véctơ của những véctơ khác, chủ yếu là phân tích 1 véctơ thành tổng 2 véctơ hoặc thành hiệu hai véctơ.

* Phương pháp 1: Vận dụng quy tắc hình bình hành.

Ví dụ: Cho tam giác ABC, I là điểm bất kỳ ở trong tam giác. Chứng minh rằng:

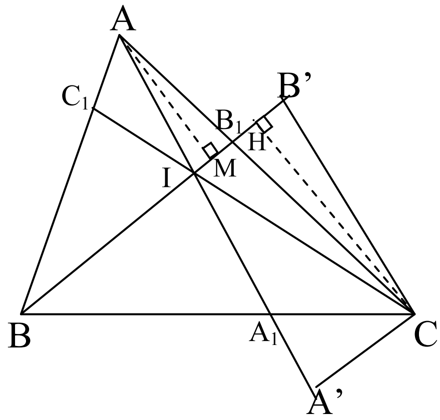
$$S_{IBC}\overrightarrow{IA} + S_{ICA}\overrightarrow{IB} + S_{IAB}\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Hướng dẫn giải:

Phân tích $\overrightarrow{IC}$ theo $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ bằng quy tắc hình bình hành.

Gọi giao điểm của các tia AI, BI, CI với BC, CA, AB lần lượt là A_1, B_1, C_1.

Dựng hình bình hành IA'CB', ta có:



. $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} = \alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}$

. $\alpha = -\frac{IA'}{IA} = -\frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{CH}{AM} = -\frac{S_{IBC}}{S_{IAB}}$

Tương tự: $\beta = -\frac{S_{IAC}}{S_{IAB}}$

Vậy $\overrightarrow{IC} = -\frac{S_{IBC}}{S_{IAB}} \overrightarrow{IA} - \frac{S_{IC}}{S_{IAB}} \overrightarrow{IB}$

$$\Rightarrow S_{IBC} \overrightarrow{IA} + S_{IAC} \overrightarrow{IB} + S_{IAB} \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

* Phương pháp 2: Phương pháp xen điểm (vận dụng quy tắc ba điểm).

<u>Ví dụ1</u>: Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm O bất kỳ, ta có $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

-Phân tích: Từ véc tơ $\overrightarrow{OG}$, để xuất hiện các véc tơ có điểm cuối là A, B, C, ta dùng quy tắc tam giác để "xen điểm" A, B, C vào và có cách phân tích véctơ dưới đây:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$$
$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG}$$
$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG}$$

Từ đó cộng theo từng vế rồi lập luận rồi suy ra điều cần chứng minh.

<u>Ví dụ 2</u>: Cho bốn điểm M, A, B, C tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \vec{O}.$$

-Phân tích: để được một tổng bằng không, ta có thể chọn phép biến đổi làm xuất hiện các cặp giá trị đối nhau. Muốn vậy, cần vận dụng cách phân tích mỗi véctơ thành một hiệu, điểm gốc có thể chọn tùy ý, song để khỏi dài dòng, ta chọn điểm gốc này là M.

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$$

Từ đó có thể dễ dàng đi đến điều phải chứng minh.

1.2.5.3 Kỹ năng ghép 1 số véctơ trong 1 tổ hợp véctơ

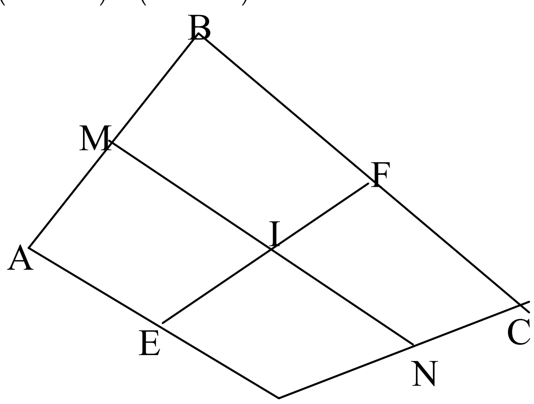
Ví dụ: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN.

Ta biết rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{O}$

Đặt tổ hợp véctơ: : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{v}$

-Nếu nhìn $\vec{v}$ dưới dạng: $\vec{v} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}\right) + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = 2\overrightarrow{IE} + 2\overrightarrow{IF}$

(E, F là trung điểm của AB, CD)



Ta được kết quả E, I, F thẳng hàng.

- Nếu nhìn $\vec{v}$ dưới dạng:

$\vec{v} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}\right) = 2\overrightarrow{IP} + 2\overrightarrow{IQ}$

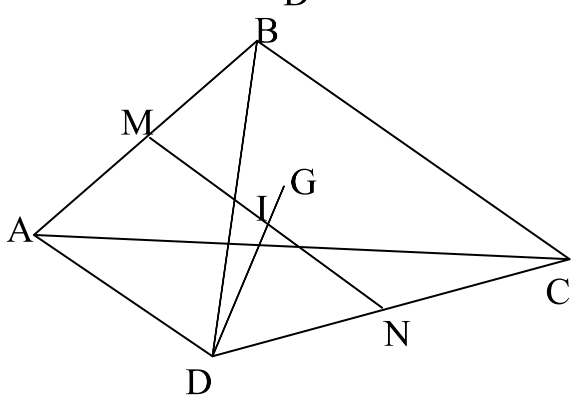
(P, Q là trung điểm của AC, BD)

Ta được P, I, Q thẳng hàng.

-Nếu nhìn $\vec{v}$ dưới dạng:

$\vec{v} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{ID}$

D



(G là trọng tâm tam giác ABC) ta được G, I, D thẳng hàng.

Tương tự, sẽ dẫn đến các đoạn nối mỗi đỉnh tứ giác ABCD và trọng tâm tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại đồng quy.

Rõ ràng, nếu nhìn một tổ hợp véctơ theo từng nhóm ta có được nhiều kết quả thú vị.

1.2.5.4 Khái quát hóa 1 số những kết quả để vận dụng vào bài toán tổng quát hơn

Thông qua việc học sinh vận dụng những kiến thức về véctơ để chứng minh một số tính chất trong hình học, tính chất của trung điểm đoạn thẳng, của trọng tâm tam giác..., người thầy giáo cần tận dụng những cơ hội để cho học sinh được rèn luyện về phân tích, tổng hợp, khái quát hóa..., chẳng hạn giúp học sinh khái quát hóa những sự kiện sau đây:

-Trung điểm O của đoạn thẳng AB: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{O}$

-Trọng tâm G của tam giác ABC: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$.

-Tâm O của hình bình hành ABCD: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$.

-Trung điểm O của đoạn thẳng nối các trung điểm của hai đường chéo hoặc của hai cạnh đối diện của tứ giác ABCD: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$.

Cần cho học sinh phát hiện sự tương tự giữa các sự kiện tương tự trên, từ đó có thể có một cách nhìn khái quát về những kiến thức véctơ tương ứng. Thật ra những bài toán trên đều là những trường hợp cụ thể của tính chất chung về trọng tâm của một hệ n điểm trong mặt phẳng.

1.3 Nội dung chương trình HH_{10}-SGK nâng cao

1.3.1 Nhiệm vụ của HH_{10}-SGK nâng cao

Môn toán THPT có nhiệm vụ cung cấp cho học sinh những kiến thức, kỹ năng, phương pháp toán học phổ thông cơ bản, thiết thực, góp phần quan trọng vào việc phát triển năng lực trí tuệ, hình thành khả năng suy luận đặc trưng của toán học, cần thiết cho cuộc sống, góp phần hình thành và phát triển các phẩm chất, phong cách lao động khoa học, biết hợp tác lao động, có ý chí và thói quen tự học thường xuyên. Môn toán tạo cơ sở để học sinh tiếp tục học lên đại học, cao đẳng, trung học chuyên nghiệp, học nghề hoặc đi vào cuộc sống lao động theo định hướng của Ban khoa học tự nhiên.

Chương trình HH_{10}-SGK nâng cao đảm nhận các nhiệm vụ cơ bản sau:

1 / Bổ sung thêm một số kiến thức về hình học phẳng và đặc biệt bổ sung thêm hai phương pháp mới: đó là phương pháp véctơ và phương pháp tọa độ.

-Véctơ là một khái niệm quan trọng, học sinh cần nắm vững để có thể học tiếp toàn bộ chương trình hình học ở bậc THPT. Nó cũng là cơ sở để trình bày phương pháp tọa độ trên mặt phẳng. Ngoài ra các kiến thức về véctơ sẽ được áp dụng trong vật lí như: vấn đề tổng hợp lực, phân tích một lực theo hai thành phần, công sinh ra bởi một lực...

-Phương pháp tọa độ trên mặt phẳng được trình bày dựa trên các kiến thức về véctơ và các phép toán véctơ. Phương pháp này giúp cho học sinh “đại số hóa” các kiến thức đã có về hình học, và từ đó có thể giải quyết các bài toán hình học bằng thuần túy tính toán.

Phương pháp tọa độ còn được sử dụng để bước đầu tìm hiểu các tính chất của ba đường Côníc.

2/ Tiếp tục rèn luyện và phát triển tư duy logíc, trí tưởng tượng không gian, và kĩ năng vận dụng kiến thức hình học vào việc giải toán, vào hoạt động thực tiễn, vào việc học tập các bộ môn khác.

1.3.2 Những chú ý khi giảng dạy HH_{10}-SGK nâng cao.

-Trước kia theo cách giảng dạy cũ, SGK chỉ đơn thuần là một tài liệu khoa học dùng cho giáo viên. Nội dung các tiết dạy thường được viết cô đọng, giống như một bài báo viết trên các tạp trí toán học: đầu tiên là nêu định nghĩa của một khái niệm mới, sau đó là các tính chất và chứng minh, rồi các định lí và chứng minh, cuối cùng là các ví dụ hoặc các bài toán.

-Trong đợt thay đổi sách năm 2006-2007, sách giáo khoa cố gắng góp phần vào việc cải tiến phương pháp giảng dạy của thầy và phương pháp học của trò. Về nội dung kiến thức, chương trình mới có những thay đổi như sau:

1. Cố gắng giảm nhẹ phần lý thuyết, không đòi hỏi phải chính xác một cách hoàn hảo. Những chứng minh rườm rà, rắc rối thì có thể bỏ qua và thay

bằng những kiểm chứng hoặc những minh họa đơn giản (Ví dụ: Các tính chất của tích véctơ với một số hoặc tích vô hướng của hai véctơ...) Những vấn đề lý thuyết quá đi sâu, không cần thiết thì cương quyết gạt bỏ.

2. Tăng cường phần luyện tập và thực hành. Các bài tập phần lớn nhằm mục đích củng cố những kiến thức cơ bản, nhằm rèn luyện kỹ năng tính toán không quá phức tạp, và có chú trọng đến các bài toán thực tiễn. Không chú trọng đến các bài tập khó, phức tạp, hoặc các bài tập phải dùng nhiều mẹo mực mới giải được.

3. Tăng cường tính thực tế, chú trọng áp dụng vào thực tế đời sống.

Với tinh thần trên, nội dung HH_{10}-SGK nâng cao được trình bày theo ý tưởng sau đây:

- Sách giáo khoa phải là tài liệu dùng cho cả thầy giáo và học sinh phải trình bày và hướng dẫn như thế nào đó để cho nếu không có thầy giáo, học sinh cũng có thể tự học được, tuy nhiên là khó khăn và vất vả hơn

Sách giáo khoa cũ thường giới thiệu một khái niệm mới bằng một định nghĩa có tính chất áp đặt. Ví dụ: Khái niệm "Véctơ” là hoàn toàn mới đối với học sinh, được định nghĩa: "Là một đoạn thẳng định hướng”, nghĩa là có phân biệt điểm đầu và điểm cuối. Khi giảng dạy, giáo viên luôn luôn tìm cách dẫn dắt một cách hợp lý, làm cho học sinh thấy được rằng khái niệm đó được xuất hiện một cách tự nhiên, chứ không phải là cái gì đó từ trên trời rơi xuống, hay từ trong các nhà toán học bật ra. Để khắc phục điều này, SGK mới đưa thêm phần dẫn dắt để học sinh có thể đọc được nó. Ví dụ: Để đưa đến khái niệm véctơ, SGK mới liên hệ đến vật lý để nói đến các đại lượng vô hướng và các đại lượng có hướng.

- SGK giúp thầy giáo tạo điều kiện cho học sinh suy nghĩ và hoạt động, tránh tình trạng học sinh chỉ nghe và ghi chép. Bởi vậy, SGK đã đưa vào một hệ thống các câu hỏi và các hoạt động. Các câu hỏi nhằm giúp học sinh nhớ lại một kiến thức nào đó hoặc để gợi ý, hoặc để định hướng cho những suy nghĩ của học sinh, các câu hỏi nói chung là dễ, vì thế không nên đưa câu trả lời trong SGK.

Các hoạt động đòi hỏi học sinh phải làm việc, phải tính toán để đi đến một kết quả nào đó. Đối với những chứng minh hoặc tính toán không quá khó, một vài bước hoạt động của học sinh có thể thay thế cho lời giải của thầy giáo. Tùy tình hình lớp và trình độ học sinh, tổ chức các hoạt động có thể có nhiều cách: Có thể là mỗi học sinh tự làm việc theo hướng dẫn của hoạt động, thầy kiểm tra các kết quả và tổng kết, cũng có thể học sinh làm việc theo từng nhóm hai người, nhiều người, cũng có thể tổ chức thảo luận chung trong lớp.

- SGK giảm nhẹ phần lý thuyết, chủ yếu là giảm nhẹ các chứng minh của các tính chất hoặc định lý. Các tính chất và định lý này nhiều lúc rất hiển nhiên, hoàn toàn có thể thấy được bằng trực giác, nhưng thực ra chứng minh chúng lại không đơn giản.

Ví dụ: Việc chứng minh tính chất phép nhân véc tơ với một số $k(l\vec{a}) = (k.l).\vec{a}$ khá phức tạp và dài dòng mà không mang lại lợi ích gì nhiều. Vì vậy SGK không trình bầy chứng minh mà chỉ nêu ra một số trường hợp cụ thể để kiểm chứng.

Ngoài ra, nếu một tính chất nào đó quá hiển nhiên SGK cũng không đưa ra, vì nếu làm như vậy, đôi khi lại gây thắc mắc cho học sinh.

Ví dụ về véc tơ đối: Sau khi định nghĩa véc tơ đối SGK dẫn ra câu hỏi để học sinh có ngay nhận xét: nếu cho véc tơ $\overrightarrow{AB}$ thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{O}$, vậy $\overrightarrow{BA}$ chính là véctơ đối của véctơ $\overrightarrow{AB}$. Từ đó đi đến kết luận mỗi véctơ đều có véctơ đối, mà không nói gì đến tính duy nhất của véc tơ đối, xem như hiển nhiên.

- SGK lần này cố gắng liên hệ thực tế trong trường hợp có thể. Chẳng hạn, trong phần véctơ có thể đưa thêm những ứng dụng trong vật lý: Tổng hợp lực, phân tích lực, công sinh ra bởi một lực, phần giải tam giác có thể đưa vào các bài toán đo đạc trên hiện trường. Ví dụ khác: Khi nói đến đường elíp, parabol và hybebol thì trong bài đọc thêm, sách đã nêu nhiều áp dụng thực tế của các đường này. Nếu không làm như vậy, học sinh chỉ biết về lý thuyết có các đường như thế còn không biết nó có tồn tại trong thực tế hay không.

1.3.3 Mục đích yêu cầu của PPVT trong chương trình HH_{10}- SGK nâng cao

Trong chương trình hình học lớp 10 học sinh được học về véctơ, các phép toán trên véctơ, các tính chất cơ bản của tích vô hướng và những ứng dụng của chúng, đặc biệt là những hệ thức quan trọng trong tam giác: Định lý Côsin, định lý Sin, công thức trung tuyến, các công thức tính diện tích tam giác...học sinh phải biết tận dụng các kiến thức cơ bản nói trên để giải một số bài toán hình học và bài toán thực tế.

Các yêu cầu đối với học sinh về kiến thức cơ bản và kỹ năng cơ bản trong chương I, II- SGK HH_{10} nâng cao là:

-Về kiến thức cơ bản: nắm được khái niệm véctơ, hai véctơ bằng nhau, hai véctơ đối nhau, véctơ không, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc trung điểm, định nghĩa và tính chất của phép cộng, phép trừ, phép nhân véctơ với số thực, tích vô hướng của hai véctơ.

-Về kĩ năng cơ bản: biết dựng một véctơ bằng véctơ cho trước, biết lập luận hai véctơ bằng nhau, vận dụng quy tắc hình bình hành, quy tắc ba điểm để dựng véctơ tổng và giải một số bài toán, biết xác định số thực k đối với hai véctơ cùng phương $\vec{a},\vec{b}$ sao cho $\vec{b} = k.\vec{a}$, vận dụng tính chất cơ bản của tích vô hướng, đặc biệt để xác định điều kiện cần và đủ của hai véctơ (khác véctơ không) vuông góc với nhau, vận dụng tổng hợp kiến thức về véctơ để nghiên cứu một số quan hệ hình học như: tính thẳng hàng của ba điểm, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, giao điểm hai đường chéo của hình bình hành...

1.4 Những khó khăn sai lầm của học sinh lớp 10 khi giải toán hình học phẳng bằng PPVT

1.4.1 Những điều cần lưu ý khi giảng dạy véctơ trong HH_{10}-SGK nâng cao

Ngay từ chương đầu tiên, chúng ta đã trình bày cho học sinh các khái niệm hoàn toàn mới: đó là véctơ, các phép toán trên véctơ và hệ trục tọa độ Đềcác vuông góc. Các khái niệm này được sử dụng trong toàn bộ nội dung của hình học 10.

Điều quan trọng là giáo viên cần làm cho học sinh hiểu rõ và nắm được về véctơ cùng với những khái niệm có liên quan như sự cùng phương, khác phương, cùng hướng, ngược hướng của hai véctơ, sự bằng nhau của hai véctơ và định nghĩa véctơ không, cùng những quy ước riêng cho véctơ không. Thông qua các ví dụ, phản ví dụ, giáo viên cần làm cho học sinh hiểu rõ những khái niện cơ bản đã được định nghĩa hoặc giới thiệu bằng các định nghĩa có tính chất mô tả. Cần phải lấy những hình ảnh trong thực tế để minh họa các khái niệm đã được đề cập trong SGK. Sau khi dạy các khái niệm mới, giáo viên cần phải có kế hoạch kiểm tra lại xem học sinh của mình đã rõ và nắm chắc kiến thức vừa học hay chưa ?

- Khi học các phép toán về véctơ, học sinh thường so sánh với các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, các số. Do đó, giáo viên cần khẳng định để học sinh biết rằng đối với tập hợp các véctơ, không có phép chia véctơ cho một véctơ. Ở đây chỉ có khái niệm tỷ số của hai véctơ cùng phương là một số thực k. Khái niệm này có liên qua đến khái niệm phép nhân một số với một véctơ.

Ví dụ: Ta có $\vec{a} = k.\vec{b}$ nên có thể viết $k = \dfrac{\vec{a}}{\vec{b}}$

Để học sinh có thể sử dụng PPVT giải toán hình học phẳng thì việc chuyển ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ véctơ và ngược lại phải thành thạo.

Do đó, trong khi dạy, giáo viên phải liên hệ những sự kiện hình học mà học sinh đã được học ở lớp dưới với những điều đang học, từ đó diễn tả chúng bằng ngôn ngữ véctơ và ngược lại.

Ví dụ: Khái niệm "I là trung điểm của đoạn thẳng AB" Thì có thể được diễn tả bằng ngôn ngữ véctơ "I là điểm thỏa mãn $\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{O}$", Hay hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau thì có thể nói $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=O$,...

Giáo viên cần làm cho học sinh biết cách phân tích một véctơ thành tổng của 2 hay nhiều véctơ tùy thuộc vào mục đích của việc phân tích đó.

Ví dụ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ với O là một điểm tùy ý.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ với AMBN là một hình bình hành.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KB}$ với I, H, K là các điểm tùy ý.

Để học sinh biết vận dụng tính chất giao hoán và tính chất kết hợp của phép cộng véctơ trong khi tính toán hoặc biến đổi một hệ thức về véctơ về dạng cần chứng minh, trước hết giáo viên cần cho học sinh làm quen với việc biến đổi một véctơ thành hiệu của hai véctơ và sau đó thựuc hiện phép biến đổi ngược lại.

Ví dụ: Chứng minh rằng với 4 điểm A, B, C, D bất kỳ ta luôn có hệ thức $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Ta lấy một điểm O tùy ý rồi biến đổi đưa về các véctơ có điểm đầu là O.

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Cách khác: Ta có thể biến đổi như sau:

Đối với 4 điểm A, B, C, D ta luôn có hệ thức $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{O}$

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$

SGK mới đã đưa vào một hệ thống câu hỏi và các hoạt động nhằm giúp giáo viên tạo điều kiện cho học sinh suy nghĩ và hoạt động. Tất nhiên, các nội dung này đều mang tính chất gợi ý để giáo viên tham khảo khi soạn bài và lên lớp. Vấn đề quan trọng là cần phải tạo điều kiện để học sinh được suy nghĩ, phát huy tính sáng tạo chủ động chiếm lĩnh được kiến thức, hình thành được kỹ năng cơ bản để tiếp thu nội dung các bài giảng một cách tích cực đầy hứng thú.

1.4.2 Những khó khăn sai lầm của học sinh lớp 10 khi giải toán hình học phẳng bằng PPVT

PPVT có nhiều tiện lợi trong việc giải các bài tập hình học. Tuy vậy, khi sử dụng phương pháp này học sinh vẫn gặp phải một số khó khăn, và không tránh khỏi những sai lầm trong khi giải toán hình học lớp 10.

Khó khăn thứ nhất mà học sinh gặp phải đó là lần đầu tiên làm quen với đối tượng mới là véctơ, các phép toán trên các véctơ. Các phép toán trên các véctơ lại có nhiều tính chất tương tự như đối với các số mà học sinh đã học trước đó, do đó vì học sinh chưa hiểu rõ bản chất của các khái niệm và các phép toán nên dễ ngộ nhận, mắc sai lầm trong khi sử dụng PPVT.

Ví dụ 1: Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Với bài toán trên, nhiều học sinh đã bị nhầm trong quá trình làm bài, có học sinh đã hiểu bài toán này như sau: Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

AB + CD =AD + CB. Vì hiểu sai bài toán, dẫn đến khó khăn trong quá trình tìm lời giải bài toán.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC với AB = 3,AC = 5, BC = 7. Tính $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$,tính góc A, và góc giữa hai đường thẳng AB và AC

Có học sinh giải bài toán này như sau:

Lời giải 1: Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=3.5=15$

$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=1$. Vậy số đo của góc A là O^0, góc giữa hai đường thẳng AB và AC là O^0.

<u>*Lời giải 2:*</u> Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=-\frac{15}{2}$

$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=-\frac{\frac{15}{2}}{15}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ góc A bằng 120^o. Góc giữa hai đường thẳng AB và AC là 120^o

Bài này học sinh trên giải sai do chưa nắm vững các kiến thức về véctơ, độ dài của véctơ và tích vô hướng của hai véctơ. Đặc biệt có sự nhầm lẫn về cách xác định góc giữa 2 véctơ và góc giữa hai đường thẳng.

Lời giải đúng như sau:

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=-\frac{15}{2}$

$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=-\frac{\frac{15}{2}}{15}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ góc A bằng 120^o. Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và AC là 60^0.

Khó khăn thứ hai khi sử dụng PPVT là do thoát ly khỏi hình ảnh trực quan, hình vẽ nên khó tưởng tượng, hiểu bài toán một cách hình thức, không hiểu hết ý nghĩa hình học của bài toán. Vì học sinh có thói quen giải bài toán hình học là phải vẽ hình nên khi sử dụng PPVT để giải một số bài tập không sử dụng hình vẽ, học sinh gặp nhiều khó khăn lúng túng.

<u>***Ví dụ 3***</u>: Cho tam giác ABC có AB=a, AC=b. AD là phân giác trong của tam giác ABC. Điểm D chia đoạn thẳng BC theo tỉ số nào?.

Có học sinh giải bài toán này như sau:

-Áp dụng tính chất đường phân giác ta có: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{a}{b}\Rightarrow DB=\frac{a}{b}DC$.

Suy ra $\overrightarrow{DB}=\frac{a}{b}\overrightarrow{DC}$

Phân tích sai lầm: Học sinh đã xác định sai chiều của véctơ. Hai véctơ $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$ ngược hướng nhau, do đó nếu điểm D chia đọan thẳng BC theo tỉ số k thì k<0.

Lời giải đúng như sau:

-Áp dụng tính chất đường phân giác ta có: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{a}{b}\Rightarrow DB=\frac{a}{b}DC$.

Suy ra $\overrightarrow{DB}=-\frac{a}{b}\overrightarrow{DC}$

<u>Ví dụ 4</u>: Cho tam giác ABC.Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a};\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Lấy các điểm A', B' sao cho $\overrightarrow{CA'}=m\vec{a};\overrightarrow{CB'}=n\vec{b}$. Gọi I là giao điểm của A'B và B'A. Hãy biểu thị véctơ $\overrightarrow{CI}$ theo hai véctơ $\vec{a};\vec{b}$.

- Có học sinh giải bài toán này như sau:

Ta có: $\overrightarrow{CA'}=m\vec{a}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA'}=m\overrightarrow{CA}$ hay $\frac{CA'}{CA}=m\Rightarrow\frac{CA'+A'A}{CA'}=\frac{1}{m}\Rightarrow\frac{CA'}{A'A}=\frac{m}{1-m}$

$\overrightarrow{CB'}=n\vec{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB'}=n\overrightarrow{CB}$ hay $\frac{CB'}{CB}=n\Rightarrow\frac{CB-CB'}{CB}=n\Rightarrow\frac{BB'}{CB}=1-n$

-Vậy: B chia đoạn B'C theo tỉ số 1-n.

A' chia đoạn AC theo tỉ số $\frac{m}{1-m}$.

I chia đoạn AB' theo tỉ số x.

B, I, A' thẳng hàng. áp dụng định lý Mênêlaúyt, ta có:

$(1-n).\frac{m}{1-m}.x=1\Rightarrow x=\frac{1-m}{m(1-n)}.\frac{AI}{IB'}$ hay $\overrightarrow{IA}=\frac{m-1}{m(1-n)}.\overrightarrow{IB'}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}-\frac{m-1}{m(1-n)}.\overrightarrow{CB'}}{1-\frac{m-1}{m(1-n)}}=\frac{m(1-n)}{1-mn}\overrightarrow{CA}+\frac{n(1-m)}{1-mn}.\overrightarrow{CB}$$

Phân tích sai lầm: Trong quá trình giải, do thoát ly khỏi hình vẽ nên HS đã xác định "nhầm" vị trí điểm I: điểm I nằm trong tam giác ABC.Mặc dù kết quả cuối cùng đúng, nhưng lời giải này vẫn chưa chính xác, vì đã "thu hẹp" điều kiện của m, n là: m > 0, n > 0. Mặt khác, HS đã xác "định" nhầm: từ tỉ số của 2 đoạn thẳng $\frac{BB'}{CB} = 1 - n$ đã suy ra ngay điểm B chia đoạn thẳng B'C theo tỉ số 1-n, và cũng làm tương tự như thế đối với điểm A'.

-Lời giải đúng của bài toán này như sau:

Vì I nằm trên A'B và AB' nên có các số x và y sao cho:

$\overrightarrow{CI} = x.\overrightarrow{CA'} + (1-x).\overrightarrow{CB} = y.\overrightarrow{CA} + (1-y)\overrightarrow{CB'}$

Hay $x.m.\vec{a} + (1-x).\vec{b} = y.\vec{a} + (1-y).n.\vec{b}$

Vì hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phuơng nên $\begin{cases} mx = y \\ 1 - x = n(1-y) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1-n}{1-mn}$

Vậy $\overrightarrow{CI} = \frac{m(1-n)}{1-mn}\vec{a} + (1 - \frac{1-n}{1-mn}).\vec{b}$

$= \frac{m(1-n)}{1-mn}.\vec{a} + \frac{n(1-m)}{1-mn}.\vec{b}$

Học sinh thường gặp khó khăn khi chuyển bài toán từ ngôn ngữ hình học thông thường sang ngôn ngữ hình học véctơ và ngược lại. Vì vậy cần rèn luyện cho học sinh kỹ năng chuyển tương đương những quan hệ hình học từ cách nói thông thường sang dạng véctơ để có thể vận dụng công cụ véctơ trong giải toán.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC. Điểm K chia trung tuyến AD theo tỉ số $\frac{AK}{KD} = \frac{3}{1}$. Đường thẳng BK chia diện tích tam giác ABC theo tỉ số nào?

Nhận xét: Trong đề ra không có "bóng dáng" véctơ, học sinh sẽ lúng túng khi chuyển sang dạng véctơ và khó xác định được cách giải bài tập này là gì. Vì vậy giáo viên cần phải gợi ý cho các em biết suy nghĩ và lựa chọn cách chuyển bài toán trên sang ngôn ngữ véctơ. (Ví dụ: để biết đường thẳng

BK chia diện tích tam giác ABC theo tỉ số nào thì cần phải tìm xem điểm F chia đoạn thẳng AC theo tỉ số nào, với F là giao điểm của BK và AC)

Như vậy, sau khi học PPVT, học sinh có trong tay thêm một công cụ để giải bài toán hình học. Không thể nói phương pháp nào tốt hơn phương pháp nào. Vì có những bài toán giải bằng phương pháp này thì dễ, nhưng lại rất vất vả khi giải bằng phương pháp khác, thậm chí còn không giải nổi. Do đó việc sử dụng phương pháp nào để giải loại bài toán hình học nào thì thuận lợi là một trong những vấn đề khó khăn đối với học sinh.

1.5 Kết luận chương 1

Định hướng đổi mới phương pháp dạy học của nước ta hiện nay là "Hoạt động hóa người học” nhằm mục đích nâng cao hiệu quả giáo dục và đào tạo. Với nội dung đã trình bày ở chương 1: Dạy học phương pháp tìm lời giải bài toán, bồi dưỡng năng lực giải toán, rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh ta thấy: dạy học giải bài tập toán cho học sinh trung học phổ thông là rèn luyện khả năng tìm lời giải bài toán theo bốn bước của Pôlya. Trong thực tế hiện nay, kỹ năng giải toán của học sinh trung học phổ thông còn nhiều hạn chế.

Để góp phần khắc phục tình trạng đó, trong chương 2 của luận văn, chúng tôi sẽ đưa ra 1 hệ thống bài tập hình học 10 giải bằng PPVT và 1 số biện pháp sư phạm nhằm rèn luyện cho học sinh khả năng tìm lời giải bài tập toán theo bốn bước gợi ý của Pôlya.

CHƯƠNG 2. XÂY DỰNG HỆ THỐNG BÀI TẬP HÌNH HỌC 10 THEO HƯỚNG RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN BẰNG PPVT

Trong chương này, sẽ trình bày các dạng bài tập hình học 10 giải bằng PPVT, mỗi dạng bài tập được thông qua các ví dụ tiêu biểu để phân tích lời giải. Qua đó đưa ra các tri thức phương pháp hoặc những kết luận sư phạm cho mỗi dạng bài tập cụ thể.

Hệ thống bài tập trong chương này nhằm mục đích rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải bài tập hình học 10 bằng PPVT bao gồm cả những kỹ năng giải toán nói chung và kỹ năng giải toán véctơ nói riêng thể hiện trong hai nội dung chính sau đây:

- Rèn luyện cách tìm đường lối giải bài toán.
- Rèn luyện khả năng giải toán.

Tìm đường lối giải bài toán là khâu quan trọng trong quá trình giải toán, yêu cầu học sinh phải từ các dữ liệu của bài toán bao gồm: giả thiết, điều kiện có trong bài toán để xác định:

- Thể loại bài toán.
- Vạch ra phương hướng giải bài toán.
- Tìm được công cụ và phương pháp thích hợp để giải bài toán.
- Phát hiện được mối liên hệ có tính tất yếu giữa giả thiết và kết luận, giữa những điều đã cho và những điều bài toán đòi hỏi.

Khi giải toán cần chú ý tìm kiếm những bài toán có liên quan và đề xuất ra những bài toán mới. Trong quá trình tiến hành giải một bài toán, học sinh có thể sử dụng các phương pháp khác nhau, các suy luận khác nhau và tìm ra các lời giải khác nhau. Vì vậy, để tìm được lời giải hay cho một bài toán, học sinh cần phải kiểm tra và nghiên cứu kỹ lời giải.

Đặc biệt đối với những bài toán không có thuật giải, đòi hỏi học sinh phải tích cực suy nghĩ tìm tòi lời giải và có phương pháp suy luận hợp lý đồng thời cần có kinh nghiệm trong việc sử dụng các công cụ để giải toán.

Để phù hợp với khả năng tiếp thu của học sinh, hệ thống bài tập được đưa ra từ dễ đến khó. Có những bài tập cơ bản có thể dùng các công thức, định lý đã học để chứng minh và kết quả của những bài tập này có thể vận dụng vào chứng minh các bài toán khác. Có những bài tập phải sử dụng kiến thức tổng hợp nhằm rèn luyện kĩ năng, khả năng vận dụng kiến thức, khả năng phát triển tư duy cho học sinh.

2.1 Những kiến thức cơ bản về véctơ trong chương trình HH_{10}-SGK nâng cao

A- véctơ và các phép toán véctơ.

1. Véctơ và là một đoạn thẳng có hướng trong đó đã chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối.

Véctơ $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu là A, điểm cuối là B có hướng từ A đến B, có độ dài là độ dài đoạn thẳng AB, được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, và có giá là đường thẳng AB. Người ta còn kí hiệu véctơ bằng các chữ thường như $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$....

2. Hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Nếu hai véctơ cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoăc ngược hướng. Hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu là $\vec{a}=\vec{b}$ nếu chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau.

3. Với mỗi điểm A, ta gọi $\overrightarrow{AA}$ là véctơ không. Véctơ không được kí hiệu là $\vec{O}$. Ta qui ước véctơ $\vec{O}$ cùng phương, cùng hướng với bất kì véctơ nào và $\left|\vec{O}\right|$=O.

4. Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó véctơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Phép toán tìm tổng của hai véctơ được gọi là phép cộng hai véctơ.

5. Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là véctơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ được kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Phép toán tìm hiệu của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ còn được gọi là phép trừ hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

6. Tích của véctơ $\vec{a} \neq \vec{O}$ với số $k \neq O$ là một véctơ kí hiệu là $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k > O, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu k < O và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Ta qui ước O. $\vec{a}=\vec{O}$, k.$\vec{O}=\vec{O}$.

7. Phân tích một véctơ theo hai véctơ không cùng phương.

a) Định nghĩa: cho 2 véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Nếu véctơ $\vec{c}$ được viết dưới dạng $\vec{c}=h\vec{a}+k\vec{b}$ với h, k là số thực nào đó thì ta nói rằng véctơ $\vec{c}$ phân tích được theo2 véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương hoặc véctơ $\vec{c}$ biểu thị được qua hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

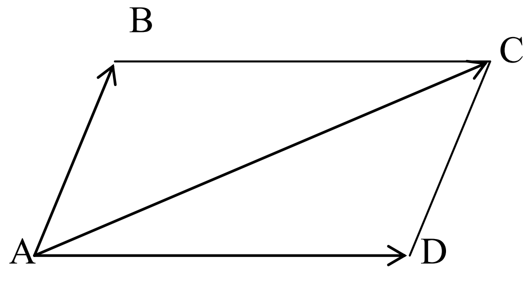
b) Định lí:Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi véctơ $\vec{x}$ đều có thể phân tích được (hoặc biểu thị được) một cách duy nhất qua 2 véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x}=h\vec{a}+k\vec{b}$.

8. Các quy tắc cần nhớ khi thực hiện thực các phép toán về véctơ

a) Quy tắc hình bình hành:

Nếu ABCD là hình bình hành thì:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$



b) Qui tắc ba điểm:

* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ (qui tắc ba điểm đối với phép cộng véctơ)

* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ (qui tắc về hiệu véctơ)

Vận dụng qui tắc này có thể biểu thị một véctơ bất kì thành hiệu của hai véctơ có chung điểm đầu.

B-Tích vô hướng

9. Định nghĩa: cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{O}$.Tích vô hướng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

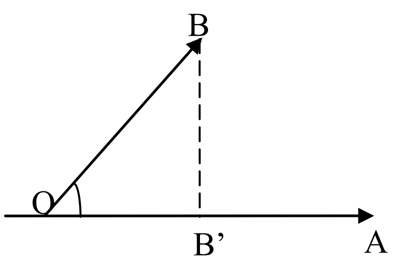
.Trường hợp ít nhất một trong hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng véctơ $\vec{O}$ ta qui ước $\vec{a}.\vec{b}$=O.

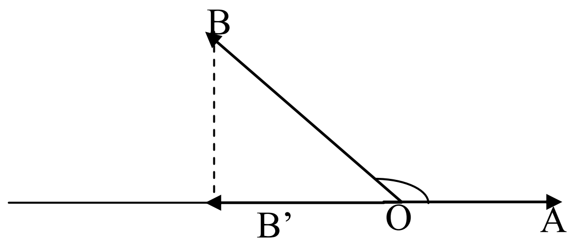
. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{O}$ ta có $\vec{a}.\vec{b}$=O $\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

. Khi $\vec{a}=\vec{b}$ ta có $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2$ là bình phương vô hướng của véctơ $\vec{a}$. Ta có $\overrightarrow{a^2} = |\vec{a}|^2$.

10. Công thức hình chiếu.

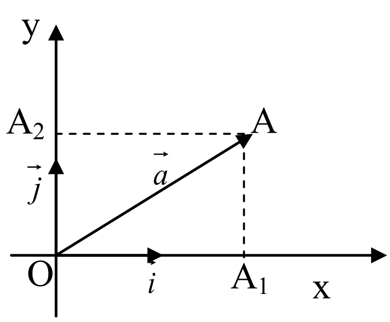
Cho hai véctơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.Giả sử B' là hình chiếu của B trên đường thẳng OA. Ta gọi véctơ $\overrightarrow{OB'}$ là hình chiếu của véctơ $\overrightarrow{OB}$ trên đường thẳng OA. Khi đó, ta có công thức hình chiếu sau đây: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$





C-Tọa độ của điểm và tọa độ của véctơ trên mặt phẳng.

11. Tọa độ của véctơ và của điểm.



Trong mặt phẳng Oxy cho một véctơ $\vec{a}$ tùy ý. Nếu $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số (x;y) được gọi là tọa độ của véctơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ Oxy, kí hiệu là $\vec{a}$=(x;y) hay là $\vec{a}$(x;y).

Tọa độ của điểm M là tọa độ của véctơ $\overrightarrow{OM}$.

Với 2 điểm M(x_M;y_M) và N(x_N;y_N) thì $\overrightarrow{MN}$=(x_N-x_M;y_N-y_M)

12. Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì:

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\ ;\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

13. Khoảng cách giữa hai điểm A($x_{A;}y_A$), B($x_{B;}y_B$) được tính theo công thức:

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

14. Góc giữa hai véctơ. Cho hai véctơ $\vec{a}$=(x;y) và $\vec{a'}=(x';y')$ khác $\vec{O}$

$$\mathrm{Cos}(\vec{a};\vec{a'})=\frac{\vec{a}.\vec{a'}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Để giải các bài toán hình học bằng PPVT, học sinh cần nắm vững những kiến thức cơ bản trên, biết vận dụng linh hoạt vào mỗi bài toán cụ thể. Biết kết hợp giữa kĩ năng tính toán với kĩ năng biến đổi các đẳng thức véctơ và các kiến thức về hình học, mỗi học sinh cần được rèn luyện khả năng tìm ra đường lối giải cho mỗi bài toán hình học bằng PPVT sẽ nêu ra trong hệ thống bài tập sau đây.

2.2 Quy trình bốn bước giải bài toán hình học bằng PPVT.

Ở lớp 10, học sinh được học về véctơ, các phép toán trên véctơ (phép cộng, phép trừ, phép nhân véctơ với số thực, tích vô hướng của hai véctơ), sau đó là trục, hệ trục tọa độ, tọa độ của điểm, tọa độ của véctơ và một vài ứng dụng đơn giản của phương pháp tọa độ. Tuy học sinh được học cả hai phương pháp: véctơ và tọa độ, phương pháp chủ yếu vẫn là phương pháp véctơ. Bởi vì, các hệ thức lượng trong tam giác và trong đường tròn đựoc xây dựng nhờ véctơ cùng các phép toán, đặc biệt là tích vô hướng của hai véctơ được định nghĩa theo một đẳng thức véctơ...Để giúp học sinh sử dụng thành thạo PPVT để gải các bài toán, đối với học sinh lớp 10, trước hết giáo viên cần rèn luyện cho học sinh nắm vững quy trình bốn bước giải bài toán bằng PPVT.

Quy trình bốn bước giải bài toán hình học bằng PPVT.

Bước 1: Chọn các véctơ cơ sở.

Bước 2: Dùng phương pháp phân tích véctơ và các phép toán véctơ để biểu diễn, chuyển ngôn ngữ từ hình học thông thường sang ngôn ngữ véctơ.

Bước 3: Giải bài toán véctơ.

Bước 4: Kết luận, đánh giá kết quả.

Giáo viên cần tận dụng các cơ hội để rèn luyện cho học sinh khả năng thực hiện 4 bước giải bài toán hình học bằng PPVT thông qua các bài tập, có thể minh họa quy trình 4 bước trên bằng ví dụ sau:

Bài toán: Cho góc xOy và hai điểm di chuyển trên hai cạnh của góc. M thuộc Ox, N thuộc Oy, luôn luôn thỏa mãn OM=2ON. Chứng minh rằng trung điểm I của MN luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải:

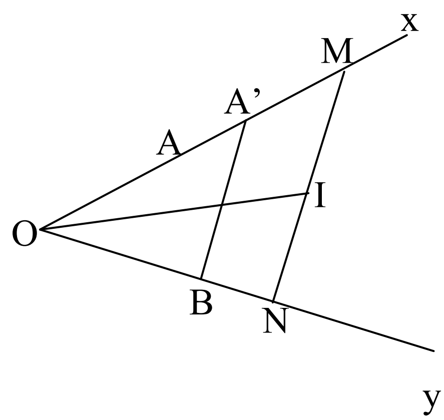
Bước1: Lấy điểm $A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho OA=OB, và chọn hai véctơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ làm hai véctơ cơ sở. Mọi véctơ trong bài toán đều phân tích được được (hoặc biểu thị được) qua hai véctơ này.

Bước 2: Giả thiết cho OM=2ON, nên nếu $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OB}$, thì $\overrightarrow{OM} = 2k\overrightarrow{OA}$. Điều phải chứng minh là I thuộc một đường thẳng cố định (dễ thấy đường thẳng này đi qua O) tương đương $\overrightarrow{OI} = p\vec{v}$, với $\vec{v}$ là một véctơ cố định nào đó.

Bước 3: Do I là trung điểm của MN, nên ta có

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}k(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Đặt $\frac{1}{2}k = p, 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{v}$, ta được điêù phải chứng minh



Bước 4: Nhận xét:

Nếu lấy $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ thì $\vec{v} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow$ đường thẳng cố định đó đi qua trung điểm A'B.

*Có thể tổng quát hóa bài toán theo 2 cách:

-Thay cho giải thiết OM=2ON bằng OM= m.ON (m là một hằng số)

-Thay cho kết luận: trung điểm I của MN thuộc một đường thẳng cố định bằng kết luận: mỗi điểm chia MN theo tỉ số $\frac{IM}{IN} = \frac{p}{q}$ (p, q là hằng số dương) đều thuộc một đường thẳng cố định.

Trong quá trình hướng dẫn học sinh giải bài toán bằng PPVT, giáo viên cần chú ý đến những tri thức phương pháp:

Ở bước 1: Nên chọn các véctơ cơ sở sao cho các véctơ trong bài toán phân tích theo chúng thuận lợi nhất. Qua mỗi bài toán học sinh sẽ thấy việc chọn các véctơ cơ sở như thế nào.

Ở bước 2: Cần rèn luyện cho học sinh chuyển đổi ngôn ngữ một cách thành thạo. Cách chuyển đổi như thế nào ta có thể thấy qua từng nhóm bài toán sẽ được trình bầy dưới đây.

Ở bước 3: Cần nắm vững các phép toán véctơ.

Đồng thời, thông qua các bài tập cụ thể, giáo viên cần làm cho học sinh hiểu rõ được tính ưu việt của PPVT. Đặc biệt các bài tập về tìm tập hợp điểm, các bài tập về chứng minh 3 điểm thẳng hàng, chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc,...là những dạng toán có nhiều cơ hội để làm rõ vấn đề này.

Tuy nhiên, không phải lúc nào cũng làm theo 4 bước như trên, không phải lúc nào cũng phân tích các véctơ theo hai véctơ cơ sở cho trước, mà có thể giải quyết bài toán một cách linh hoạt.

Theo chúng tôi thấy, việc rèn luyện cho học sinh thông qua một hệ thống bài tập đã được phân loại sẽ đem lại hiệu quả cao trong dạy học.

2.3 Hệ thống bài tập

2.3.1 Những kiến thức bổ trợ để xây dựng hệ thống bài tập.

Kiến thức trong SGK đưa ra chưa là các tri thức phương pháp đầy đủ cho học sinh. Vì tri thức phương pháp không phải là tri thức tường minh dưới dạng lí thuyết(định nghĩa, định lí,...)mà còn được thể hiện dưới dạng bài tập. Vậy trong quá trình giảng dạy giáo viên cần phải nhấn mạnh các bài tập cơ bản trong SGK hoặc phải bổ sung thêm các bài tập (vì đây là các tri thức phương pháp để giải các bài tập sau này).

A - Điều kiện cần và đủ dể hai véctơ không cùng phương

Bài toán 1: (Bài 12- trang17 - SBT-HH10- nâng cao)

Chứng minh rằng hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$

Hãy phát biểu diều kiện cần và đủ để hai véctơ không cùng phương

Giải: Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{O}$ với m $\neq$ O, ta có $\vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b}$ suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

. Nếu $\vec{a} = \vec{O}$ thì có thể viết $m\vec{a} + O.\vec{b} = \vec{O}$ với m $\neq$ O.

. Nếu $\vec{a} \neq \vec{O}$ thì có số m sao cho $\vec{b} = m\vec{a}$ tức là $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{O}$, trong đó n = -1 $\neq$ O.

*Vậy điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là có cặp số m, n không đồng thời bằng không sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{O}$.

Từ đó suy ra: điều kiện cần và đủ để 2 véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương là nếu $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{O}$ thì m = n = O.

B- Tâm tỉ cự của hệ điểm { A_1, A_2,......A_n} ứng với các hệ số $\{\alpha_1,\alpha_2,......\alpha_n\}$ (n ≥2)

Bài toán 2: Cho hai điểm A, B phân biệt và hai số α,β không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\alpha+\beta=O$ thì không tồn tại điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{O}$.

b) Nếu $\alpha+\beta\neq O$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{O}$.

Giải:

a) Giả sử $\alpha+\beta=O$ mà có điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{O}$.

$\Rightarrow\alpha\overrightarrow{MA}-\alpha\overrightarrow{MB}=\vec{O}\ \Rightarrow\alpha(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=\vec{O}\Rightarrow\alpha.\overrightarrow{BA}=\vec{O}$

Vì $\overrightarrow{BA}\neq\vec{O}$ nên $\alpha=O\Rightarrow\beta=O$: mâu thuẫn. Vậy không tồn tại điểm M.

b) Giả sử $\alpha+\beta\neq O$, ta có $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{O}$

$\Leftrightarrow-\alpha\overrightarrow{AM}+\beta(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})=\vec{O}$

$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{AM}=\beta\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ sự tồn tại và duy nhất của điểm M, đồng thời chỉ ra cách dựng điểm M.

Bài toán 3: Cho hai điểm A, B và 2 số thực α,β. Chứng minh: nếu $\alpha+\beta=O$ thì véctơ $\vec{v}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ không đổi, không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Giải:

$\vec{v}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MA}-\alpha\overrightarrow{MB}=\alpha(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=\alpha\overrightarrow{BA}$ là 1 véctơ không đổi.

Bài toán 4: Cho tam giác ABC và 3 số α,β,γ không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\alpha+\beta+\gamma\neq O$ thì tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{O}$

b) Nếu $\alpha+\beta+\gamma=O$ thì không tồn tại điểm M sao cho:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{O}$$

Giải:

a) Vì $\alpha+\beta+\gamma\neq O\Rightarrow(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\neq O$ nên 1 trong 3 số:

$(\alpha+\beta),(\beta+\gamma),(\gamma+\alpha)$ khác không.

Chẳng hạn $(\alpha+\beta)\neq O$ theo bài toán 3b, tồn tại điểm E sao cho:

$\alpha\overrightarrow{EA}+\beta\overrightarrow{EB}=\vec{O}$ khi đó: $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{O}$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EA})+\beta(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EB})+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{O}$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{IE}+(\alpha\overrightarrow{EA}+\beta\overrightarrow{EB})+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{O}$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{IE}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{O}\quad(*)$$

Vì $(\alpha+\beta)+\gamma\neq O$nên tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn (*)

b) Giả sử tồn tại điểm M thỏa mãn đẳng thức đã cho và giả sử, chẳng hạn $\alpha\neq O$.Ta có: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{O}\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}-(\alpha+\beta)\overrightarrow{MC}=\vec{O}$

$$\Leftrightarrow\alpha(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})+\beta(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=\vec{O}$$

$$\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}=-\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB}$$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}$ song song $\overrightarrow{CB}$ (mâu thuẫn). Vậy không tồn tại điểm M.

Nhận xét:

Trong trường hợp $\alpha+\beta+\gamma\neq O$, với điểm M tùy ý ta có:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})+\gamma(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MI}+(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC})$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MI}$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta có thể chứng minh được kết quả tổng quát:

- Cho n điểm $A_1, A_2, ...A_n$ và n số thực $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ sao cho:

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq o$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm I sao cho:

$\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \overrightarrow{O}$ (1).

Điểm I gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, ...A_n\}$ ứng với các hệ số $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n\}$ ($n \geq 2$).

Từ (1), với điểm M tùy ý ta có:

$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\overrightarrow{MI}$

Công thức này thường xuyên được sử dụng trong những bài toán có liên quan tới tâm tỉ cự. Ta gọi nó là công thức thu gọn.

Với n=3 và $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, ta thấy đây là tính chất trọng tâm của tam giác được trình bày dưới đây.

C- Tính chất của trung điểm.

Bài toán 5: Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O}$

Giải:

Theo quy tắc 3 điểm, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{O}$. Mặt khác, vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O}$.

Nhận xét: tính chất trên là trường hợp đặc biệt của bài toán 2a, khi $\alpha = \beta = 1$.

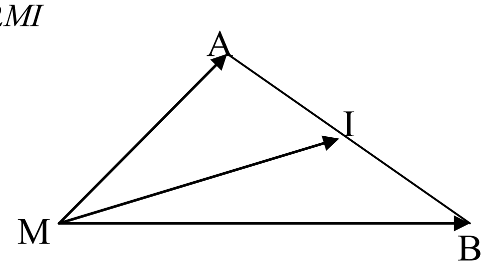
Bài toán 6: Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi với điểm M bất kì, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Giải:

Với điểm M bất kì ta có:

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

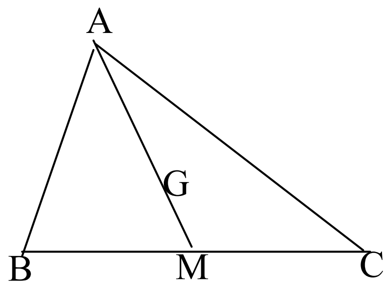


Như vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$. Ta biết rằng I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Tính chất trọng tâm của tam giác

Bài toán 7: Cho tam giác ABC. Chứng minh điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$.

Giải:



Gọi M là trung điểm cạnh BC, ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$.

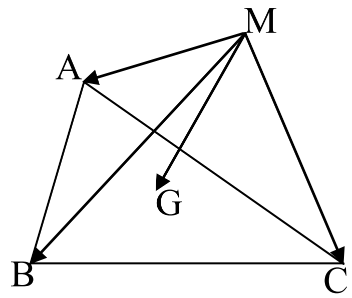
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{O}$

$\Leftrightarrow$ G thuộc đoạn AM và GA=2GM.

$\Leftrightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài toán 8: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Giải:



$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=.\,\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$.

$=(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+3\overrightarrow{MG}$

$=\overrightarrow{O}+3\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}$.

(Vì G là trọng tâm của tam giác ABC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$.)

D- Điều kiện cần và đủ để 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng.

Bài toán 9: *(Bài 15- tr7 -SBT-HH$_{10}$- nâng cao)*

Cho 3 điểm ABC.

a) Chứng minh rằng nếu có một điểm I và một số t nào đó sao cho $\overrightarrow{IA}=t\overrightarrow{IB}+(1-t)\overrightarrow{IC}$ thì với mọi điểm I' ta có: $\overrightarrow{I'A}=t\overrightarrow{I'B}+(1-t)\overrightarrow{I'C}$

b) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{IA}=t\overrightarrow{IB}+(1-t)\overrightarrow{IC}$ là điều kiện cần và đủ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải:

a) Theo giả thiết $\overrightarrow{IA}=t\overrightarrow{IB}+(1-t)\overrightarrow{IC}$, thì với mọi điểm I' ta có

$\overrightarrow{II'}+\overrightarrow{I'A}=t(\overrightarrow{II'}+\overrightarrow{I'B})+(1-t)(\overrightarrow{II'}+\overrightarrow{I'C})=t\overrightarrow{I'B}+(1-t)\overrightarrow{I'C}+\overrightarrow{II'}$

Suy ra $\overrightarrow{I'A}=t\overrightarrow{I'B}+(1-t)\overrightarrow{I'C}$.

b) Nếu ta chọn I' trùng với A thì có $\vec{O} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$, đó là điều kiện cần và đủ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

E- Công thức điểm chia.

Bài toán 10: Cho đoạn thẳng AB, số thực k khác O và 1. Ta nói M chia đoạn AB theo tỉ số k nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với điểm C bất kì ta có:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{CA} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CB}\ (*)$$

Ta gọi (*) là công thức điểm chia.

Giải:

Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{CA}} - \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CB} - k\overrightarrow{CM}$

$$\Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} - k\overrightarrow{CB}$$

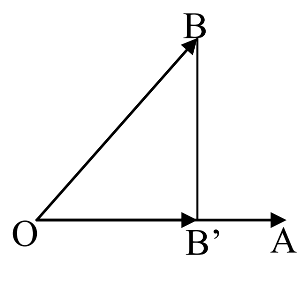
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{CA} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CB}$$

F- Công thức hình chiếu.

Cho hai véctơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.Gọi B' là hình chiếu của B trên đường thẳng OA.Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB'}$$

Giải:



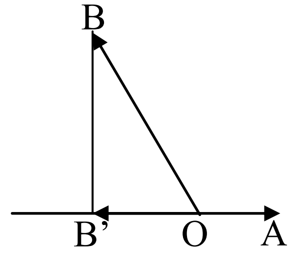
Trường hợp 1: Nếu $A\hat{O}B < 90^o$ Thì

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} =$ OA.OB.cos$\widehat{AOB}$

= AO.OB'

= AO.OB'.cosO^o

$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$



Trường hợp 2: Nếu $\widehat{AOB} > 90^0$ Thì

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} =$ OA.OB.cosAOB = -OA.OB.cos$\widehat{B'OB}$

= - OA.OB'=OA.OB'.cos180^0 = $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$

*Véctơ $\overrightarrow{OB'}$ gọi là **hình chiếu** của véc tơ $\overrightarrow{OB}$ trên đường thẳng OA. Công thức $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$ gọi là **công thức hình chiếu.***

2.3.2 Những dụng ý sư phạm khi xây dựng hệ thống bài tập

* Hệ thống bài tập dưới đây được xây dựng theo cấu trúc như sau:

-Bước1: đưa ra tri thức phương pháp cho mỗi dạng bài tập.

- Bước 2: đưa ra ví dụ, và hướng dẫn HS thực hiện 4 bước theo phương pháp tìm lời giải bài toán của Pôlya hoặc theo 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT.

-Bước 3: đưa ra hệ thống bài tập cho mỗi dạng bài tập.

-Bước 4: đưa ra lời giải hoặc chỉ dẫn cho hệ thống bài tập trên.

*Việc đưa ra hệ thống bài tập đã phân dạng nhằm giúp HS có kinh nghiệm giải toán và rèn luyện các kĩ năng:

- Chuyển bài toán sang ngôn ngữ véc tơ.
- Phân tích 1 véc tơ thành một tổ hợp véc tơ.
- Kỹ năng biết cách ghép 1 số véctơ trong 1 tổ hợp véctơ.
- Biết khái quát hóa 1 số những kết quả để vận dụng vào bài toán tổng quát hơn.

Đặc biệt biết vận dụng quy trình 4 bước giải bài toán hình học bằng PPVT vào giải các bài tập HH.

*Giáo viên có thể sử dụng hệ thống bài tập đã phân dạng này trong các tình huống dạy học khác nhau như: làm bài tập về nhà, bài tập phân hóa, dùng để bồi dưỡng HS khá giỏi, dùng để làm đề kiểm tra, kiểm tra trắc nghiệm…góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS.

2.3.3 Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Đối với dạng toán trên ta có thể dùng điều kiện cùng phương của 2 véctơ để giải toán.

Véctơ $\vec{b}$ cùng phương với véctơ $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{O}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b}$=k$\vec{a}$

*Từ đó ứng dụng vào dạng toán:

Cho 3 điểm A,B,C thỏa mãn 1 điều kiện xác định, chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.

Phương pháp:

- Hãy xác định véctơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

- Chỉ ra rằng 2 véctơ đó cùng phương, nghĩa là hãy chỉ ra số thực k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Ví dụ 1: (Bài 19- tr8- SBT-HH 10 nâng cao)

Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo các tỷ số lần lượt là m, n, p (đều khác 1)

Chứng minh rằng: M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi mnp=1 (Định lý Mênêlauýt)

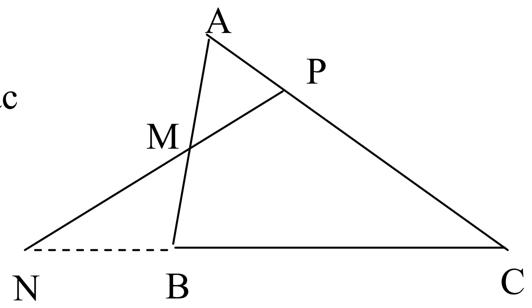
Hướng dẫn giải: (Theo quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT)

Bước 1: GV Chọn véctơ cơ sở.

HS: Chon hai véctơ $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ làm 2 véctơ cơ sở. Mọi véctơ xuất hiện trong bài toán đều phân tích được theo 2 véctơ này.

Bước 2:

GV: Các điểm M,N,P lần lượt chia các đoạn thẳng AB,BC,CA theo các tỷ số lần lượt là m, n, p (đều khác 1) tương đương với các đẳng thức véctơ nào ?



HS: $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{NB} = n\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{PC} = p\overrightarrow{PA}$

GV: Điều phải chứng minh M, N, P thẳng hàng tương đương với đẳng thức véctơ nào phải xảy ra ?

HS: - chỉ ra số thực k sao cho $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN}$ hoặc

- Với điểm O bất kỳ và tỷ số thực t ta có

$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{ON} + (1-t)\overrightarrow{OP}$

<u>Bước 3</u>: Lấy điểm O nào đó, ta có

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-m\overrightarrow{OB}}{1-m};\ \overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OC}}{1-n};\ \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OC}-p\overrightarrow{OA}}{1-p}$$

Để đơn giản tính toán, ta chọn điểm O trùng với điểm C khi đó ta có:

$$\overrightarrow{CM}=\frac{\overrightarrow{CA}-m\overrightarrow{CB}}{1-m};\ \overrightarrow{CN}=\frac{\overrightarrow{CB}}{1-n};\ \overrightarrow{CP}=\frac{-p\overrightarrow{CA}}{1-p}\ (1)$$

Từ hai đẳng thức cuối của (1), ta có

$$\overrightarrow{CB}=(1-n)\overrightarrow{CN};\ \overrightarrow{CA}=\frac{p-1}{p}\overrightarrow{CP}$$

Và thay vào đẳng thức đầu của (1) ta được

$$\overrightarrow{CM}=\frac{p-1}{p(1-m)}\overrightarrow{CP}-\frac{m(1-n)}{1-m}\overrightarrow{CN}$$

Từ bài toán 9

- Điều kiện cần và đủ để 3 điểm M, N, P thẳng hàng là:

$$\frac{p-1}{p(1-m)}-\frac{m(1-n)}{1-n}=1\Leftrightarrow p-1-pm(1-n)=p(1-m)$$

$$\Leftrightarrow \text{mnp}=1$$

<u>Bước 4</u>: Vậy cho tam giác ABC.Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo tỷ số m, n, p thì M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi: mnp=1

<u>Ví dụ 2</u>: Trên đường thẳng a cho các điểm A_1, B_1, C_1 và trên đường thẳng b cho các điểm A_2, B_2, C_2 thỏa mãn:

$$\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{A_1C_1};\quad \overrightarrow{A_2B_2}=k\overrightarrow{A_2C_2}\ (k\neq 1)$$

Giả sử các điểm A_o, B_o, C_o trên A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sao cho $\overrightarrow{A_1A_0}=l\overrightarrow{A_1A_2}$; $\overrightarrow{B_1B_0}=l\overrightarrow{B_1B_2}$. $\overrightarrow{C_1C_0}=l\overrightarrow{C_1C_2}$ Chứng minh 3 điểm A_o, B_o, C_o thẳng hàng.

<u>Hướng dẫn giải</u>:

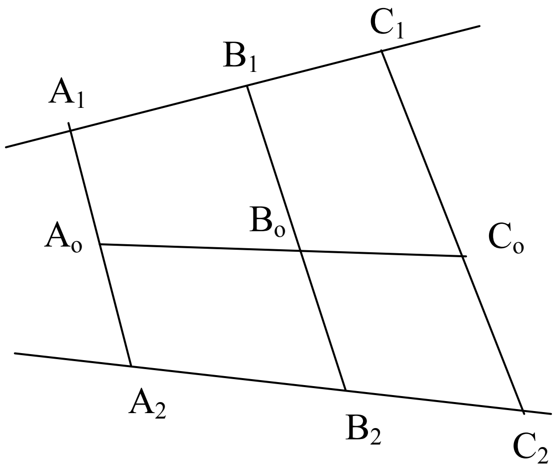
- Theo giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{A_0A_1} = l\overrightarrow{A_2A_1} = l(\overrightarrow{A_oA_1} - \overrightarrow{A_oA_2})$$

$$= l\,\overrightarrow{A_oA_1} - l\,\overrightarrow{A_oA_2}$$

$$\Rightarrow (1-l)\overrightarrow{A_oA_1} = -l\overrightarrow{A_oA_2}$$

$$\Rightarrow (l-1)\overrightarrow{A_oA_1} = l\,\overrightarrow{A_oA_2}$$



Tương tự

$$(l-1)\,\overrightarrow{B_0B_1} = l\overrightarrow{B_oB_2}$$

$$(l-1)\,\overrightarrow{C_0C_1} = l\overrightarrow{C_oC_2}$$

. $\left[\begin{array}{l} l = o \\ l = 1 \end{array}\right.$ dễ có A_o, B_o, C_o thẳng hàng.

.Với $l \neq 0$, $l \neq 1$ ta có $\begin{cases} \overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_0} \\ \overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{A_0A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_0} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-l)\overrightarrow{A_oB_o} = (1-l)\overrightarrow{A_oA_1} + (1-l)\overrightarrow{A_1B_1} + (1-l)\overrightarrow{B_1Bo} \\ l\overrightarrow{A_oB_o} = l\overrightarrow{A_oA_2} + l\overrightarrow{A_2B_2} + l\overrightarrow{B_2B_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_oB_o} = \left((1-l)\overrightarrow{A_oA_1} + l\overrightarrow{A_oA_2}\right) + \left((1-l)\overrightarrow{A_1B_1} + l\overrightarrow{A_2B_2}\right) + (1-l)\overrightarrow{B_1B_o} + l\overrightarrow{B_2B_o}$$

$$= \quad \vec{0} + \left((1-l)\overrightarrow{A_1B_1} + l\overrightarrow{A_2B_2}\right) + \vec{0}$$

$$= \quad (1-l)\overrightarrow{A_1B_1} + l\overrightarrow{A_2B_2} = k\left[(1-l)\overrightarrow{A_1C_1} + l\overrightarrow{A_2C_2}\right]$$

Tương tự:

$$\overrightarrow{A_oC_o} = (1-l)\overrightarrow{A_1C_1} + l\overrightarrow{A_2C_2}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_oB_o} = k\overrightarrow{A_oC_o}$ .Vậy 3 điểm A_o, B_o, C_o thẳng hàng.

Lưu ý: Với $l = \frac{1}{2}$ thì A_o, B_o, C_o lần lượt là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, lúc này học sinh dễ dàng chứng minh được bài 36-tr11-SBT-HH_{10}-nâng cao:

"Cho tứ giác ABCD. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

*Hoặc:*Cho tứ giác ABCD. Trên các cạnh AB, CD ta lấy các điểm tương ứng M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC}$. Chứng minh rằng trung điểm của 3 đoạn thẳng AD, BC, MN thẳng hàng.

Ví dụ 3: *(Bài toán 3-tr21-SGK HH_{10}-nâng cao)*

Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp tâm O. Chứng minh 3 điểm O, G, H thẳng hàng.

Hướng dẫn giải: Gọi I là trung điểm của BC.

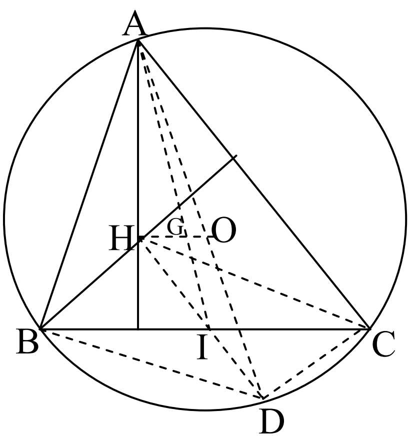
Dễ thấy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ nếu tam giác ABC vuông.

Nếu tam giác ABC không vuông, gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

Khi đó: BH song song DC(vì cùng vuông góc với AC)

BD song song CH (Vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra BDCH là hình bình hành, do đó I là trung



điểm của HD. Từ đó $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$

* Ta có: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AH}$ nên

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$

* Ta đã biết $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

Vậy $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ suy ra 3 điểm O, G, H thẳng hàng (Đường thẳng đi qua 3 điểm này gọi là đường thẳng Ơle của tam giác ABC).

Lưu ý: Học sinh phải có thể vận dụng cách chứng minh bài toán trên vào giải các bài toán sau:

1/ (Bài 38 - tr11-SBT- HH10 - nâng cao).

Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn trên ngoại tiếp O. Chứng minh rằng:

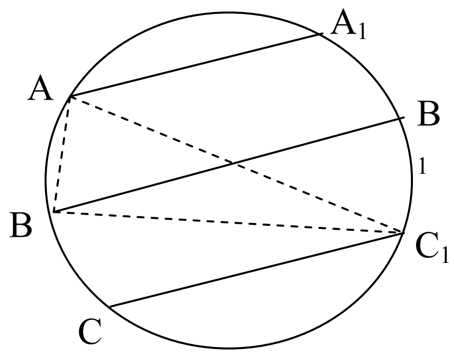
a/ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

b/ $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OH}$

2/ (Bài tập 39- tr11 SBT - HH10 - nâng cao)

Cho 3 dây cung song song AA_1, BB_1, CC_1 của hình tròn (O) chứng minh rằng trực tâm của 3 tam giác ABC_1, BCA_1 và ACB_1 nằm trên một đường thẳng.

Hướng dẫn giải:



Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của tam giác

ABC_1, BCA_1 và ACB_1 theo kết quả ví dụ 3, ta có:

$$\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC_1}$$

$$\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}$$

$$\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}$$

Suy ra: $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{AA_1}$

$$\overrightarrow{H_1H_3}=\overrightarrow{OH_3}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{BB_1}$$

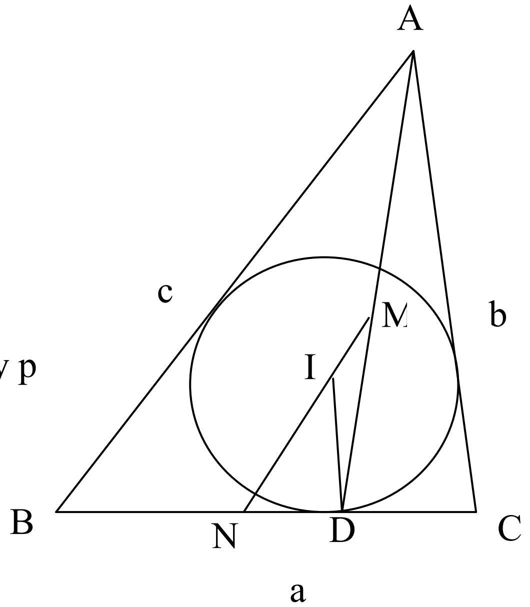
Vì các dây cung AA_1, BB_1, CC_1 song song với nhau nên 3 véctơ $\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{CC_1}$ cùng phương. Do đó 2 véctơ $\overrightarrow{H_1H_2}$ và $\overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương, hay 3 điểm H_1, H_2, H_3 thẳng hàng.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh 3 điểm M, N, I thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$

$$\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID})$$



Ta có: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{o}$ (*)

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = -(\frac{b}{a}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{a}\overrightarrow{IC})$ (1)

Mặt khác: DB=P-b; DC=p-c. Ở đây p là nửa chu vi tam giác ABC.

$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{p-b}{p-c} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{p-b}{p-c}\overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ID} = \frac{\overrightarrow{IB} + \frac{p-b}{p-c}\overrightarrow{IC}}{1 + \frac{p-b}{p-c}} = \frac{(p-c)\overrightarrow{IB} + (p-b)\overrightarrow{IC}}{a} \quad (2)$$

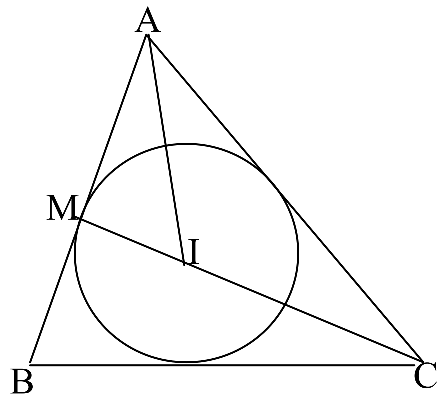
Từ (2) và (3) ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = \frac{(p-b-c)\overrightarrow{IB} + (p-b-c)\overrightarrow{IC}}{a} = \frac{(p-b-c)}{a}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\frac{p-b-c}{a})(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \frac{p-b-c}{a}\overrightarrow{IN}$$

$\Rightarrow$ 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Chứng minh trên có sử dụng đẳng thức (*) là kết quả của bài tập sau:



Bài 37b-tr11-SBT HH$_{10}$-nâng cao

Cho tam giác ABC với các cạnh AB=c, BC=a, CA=b. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{o}$

Chứng minh:

.Gọi CM là phân giác trong của góc C.

.Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của tam giác ACM.

. Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{IM}{IC} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = -\frac{AM}{AC}\overrightarrow{IC}$$

Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AM} + \frac{AM}{AC}\overrightarrow{IC}}{1 + \frac{AM}{AC}} = \frac{AC}{AC + AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AM}{AC + AM}\overrightarrow{IC}$$

$$= \frac{b}{b\frac{bc}{a+b}}\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{bc}{a+b}}{b + \frac{bc}{a+b}}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{a+b+c}(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) + \frac{c}{a+b+c}(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA})$$

$$Suyra: (1 - \frac{b+c}{a+b+c})\overrightarrow{IA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

***Hệ thống bài tập.**

Bài 1: *(Bài 26- SBT HH_{10}-Nâng cao)*

Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho: $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$

Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB.

Bài 2. Trên các cạnh của tam giác ABC, lấy các điểm M, N, P sao cho: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{O}$. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AN}$ qua $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AP}$, từ đó suy ra M, N, P thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC, gọi D, I, N là các điểm xác định bởi các hệ thức: $3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}, \overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CN}$. Chứng minh A, I, D thẳng hàng.

Bài 4. *(Bài 20a-tr8-SBT HH_{10}-Nâng cao)*

Cho tam giác ABC, và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi A_2, B_2, C_2 lần luợt là các diểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng;

a) Nếu 3 điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng thì 3 điểm A_2, B_2, C_2 cũng thế.

b) Trọng tâm của 3 tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC đều, tâm O. M bất kỳ ở trong tam giác ABC và có hình chiếu xuống 3 cạnh BC, CA, AB tương ứng là P, Q, R. Gọi K là trọng tâm tam giác PQR.

a) Chứng minh: M, O, K thẳng hàng.

b) Cho N là một diểm tùy ý trên BC. Hạ NE, NF tương ứng vuông góc với AC, AC. Chứng minh N, J, O thẳng hàng, với J là trung điểm của EF.

Bài 6. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Qua điểm M tùy ý trên mặt phẳng tam giác ABC dựng các đường thẳng song song với GA, GB, GC, chúng tương ứng cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh M, G, G_1 thẳng hàng, với G_1 là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$. Có nhận xét gì về điểm G_1?

Bài 7. (Bài 28-tr24-SGK HH_{10}-nâng cao)

Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

a) Có một điểm G duy nhất sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của 4 điểm A, B, C, D. Tuy nhiên, người ta vẫn quen gọi G là trọng tâm của tứ giác ABCD.

b) Trọng tâm G là trung điểm của mỗi đoạn thẳng nối các trung điểm hai cạnh đối của tứ giác, nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của tứ giác.

c) Trọng tâm G nằm trên các đoạn thẳng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo bởi 3 đỉnh còn lại.

Bài 8. Cho tứ giác ABCD. Hai điểm M, N thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{CN}{CD}$.Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD, I là trung điểm của MN. Chứng minh 3 điểm P, I, Q thẳng hàng.

Bài 9: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đường chéo AC, BD. Chứng minh rằng I, E, F thẳng hàng.

Hướng dẫn hoặc lời giải

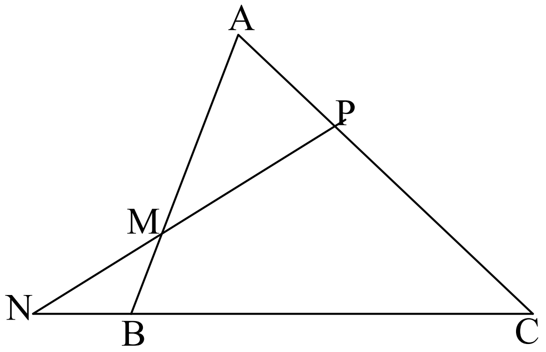
Bài 1

Ta có $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OB}$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=\alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow M\in d$$

Vì $\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA}$ nên M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $0\le\alpha\le 1$

Bài 2.



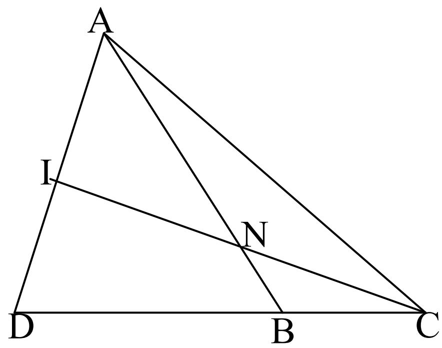
Từ giả thiết $\overrightarrow{NC}=6\overrightarrow{NB}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}}{-5}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{AP}+\frac{8}{5}\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow\overrightarrow{PN}=\frac{8}{5}\overrightarrow{PM}$

Suy ra M, N, P thẳng hàng.

Bài 3.



Cách 1. Ta có:

$\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=4\overrightarrow{IN}=2\overrightarrow{IC}$

$3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{ID}$

Vậy $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}\Rightarrow$ A, I, D thẳng hàng và I là trung điểm của AD.

Cách 2

Từ $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NB}\Leftrightarrow\overrightarrow{NA}=-3\overrightarrow{NB}\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{4}$ (*)

Mặt khác: $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CI},3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Thay vào (*), ta được: $\overrightarrow{CI}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}}{2}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

Vậy I, A, D thẳng hàng, I là trung điểm của AD.

Bài 4

a) Ta gọi k, l, m là các số sao cho $\overrightarrow{A_1B}=k\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{B_1C}=l\overrightarrow{B_1A};\overrightarrow{C_1A}=m\overrightarrow{C_1B}$

$\overrightarrow{A_1B}=k\overrightarrow{A_1C}\Rightarrow\overrightarrow{BA_1}=\dfrac{-k}{1-k}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{C_1A}=m\overrightarrow{C_1B}\Rightarrow\overrightarrow{BC_1}=\dfrac{1}{1-m}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{B_1C}=l\overrightarrow{B_1A}\Rightarrow\overrightarrow{BB_1}=\dfrac{\overrightarrow{BC}-l\overrightarrow{BA}}{1-l}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BB_1}=\dfrac{1}{1-l}\dfrac{k-1}{k}\overrightarrow{BA_1}-\dfrac{l}{1-l}(1-m)\overrightarrow{BC_1}$

A_1, B_1, C_1 thẳng hàng $\Leftrightarrow\dfrac{1}{1-l}\dfrac{k-1}{k}-\dfrac{l}{1-l}(1-m)=1\Leftrightarrow k.l.m=1$

Ba điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt đối xứng với 3 điểm A_2, B_2, C_2 qua trung điểm đoạn thẳng BC, CA, AB nên ta có: $\overrightarrow{A_2C}=k\overrightarrow{A_2B};\overrightarrow{B_2A}=l\overrightarrow{B_2C};\overrightarrow{C_2B}=m\overrightarrow{C_2A}$

$\Rightarrow$ Nếu 3 điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng thì 3 điểm A_2, B_2, C_2 cũng thẳng hàng và ngược lại.

b) Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

G, G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, tam giác $A_1B_1C_1$, tam giác $A_2B_2C_2$.

Ta có $3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

$3\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GB_2}+\overrightarrow{GC_2}$

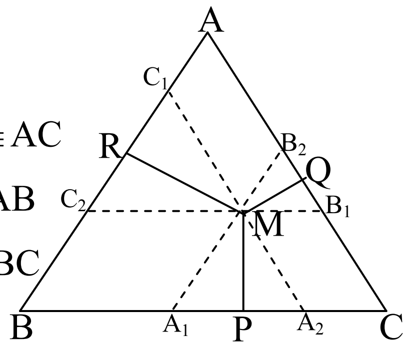
$$\Rightarrow 3(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2}) = (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2}) + (\overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GB_2}) + (\overrightarrow{GC_1} + \overrightarrow{GC_2})$$

$$= 2.(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GE}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{GG_1} = -\overrightarrow{GG_2}$. Vậy G, G_1, G_2 thẳng hàng, G là trung điểm của G_1G_2.

<u>Nhận xét</u>: Có thể dùng kết quả định lý Mênelaúyt (đã được chứng minh ở ví dụ 1 (bài 19- tr8-SBT HH_{10}-nâng cao) để kiểm tra kết quả của bài 2, và bài 4a.

<u>Bài 5</u>



a)Qua M kẻ A_1B_2 song song AB, $A_1 \in BC$, $B_2 \in AC$

kẻ B_1C_2 song song BC, $B_1 \in AC$, $C_2 \in AB$

kẻ C_1A_2 song song AC, $C_1 \in AB$, $A_2 \in BC$

$\Rightarrow$ tam giác MB_1B_2, tam giác MC_1C_2,

tam giác MA_1A_2 đều.

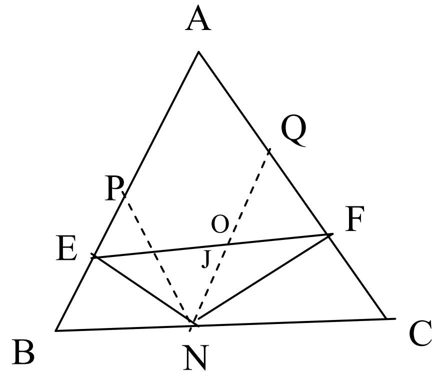
$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MB_2}\right] + \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1}\right] + \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Vậy: $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}\right] = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} \Rightarrow$ M, O, K thẳng hàng



b) Kẻ NP // AC (P $\in$ AB)

NQ // AB (Q $\in$ AC)

$\Rightarrow$Tứ giác APNQ là hình bình hành

Ta có: $\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF})$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{NC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC})$$

$$= \frac{1}{3}.3.\overrightarrow{NO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{NO}$$

Vậy N, J, O thẳng hàng

Bài 6: Qua M kẻ A_2B_3 // AB; $A_2 \in$ BC; $B_3 \in$ AC

Kẻ B_2C_3 // BC; $B_2 \in$ AC; $C_3 \in$ AB

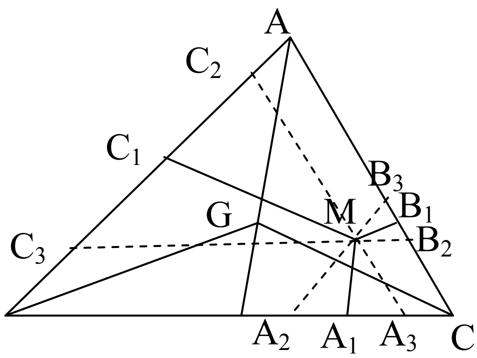
Kẻ A_3C_2 // AC; $A_3 \in$ BC; $C_2 \in$ AB

Khi đó:

$\Delta MA_2A_3 \sim \Delta C_2C_3M \sim \Delta B_3MB_2 \sim \Delta ABC$

Vì vậy MA_1, MB_1, MC_1 lần lượt là đường trung tuyến

của $\Delta MA_2A_3, \Delta MB_2B_3, \Delta MC_2C_3$.



Ta có: $\overrightarrow{MG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1})$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MB_3}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MC_3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MG}$$

$\Rightarrow$ M, G, G_1 thẳng hàng và G_1 là trung điểm của GM.

Nhận xét: cho tam giác ABC đều ta được kết quả ở bài 5a.

Bài 8

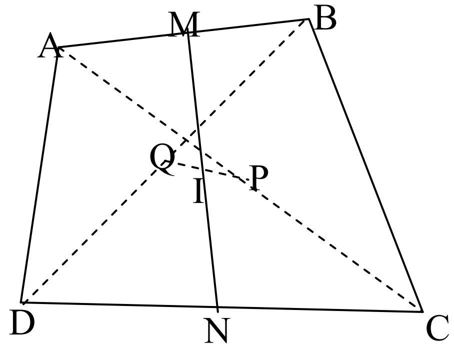
Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}; (0 \le k \le 1)$

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC và BD.

Ta có $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN}) = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ (1)

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \quad (2)$$

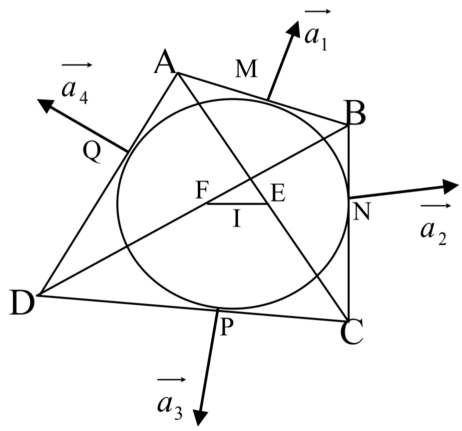
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{PI} = k\overrightarrow{PQ}$ hay P, I, Q thẳng hàng. Vì $0 \le k \le 1$ nên I thuộc đoạn PQ.



Nhận xét: Cho k=$\frac{1}{2}$, ta được kết quả bài 7b.

Bài 9

Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA; x, y, z, t là các khoảng cách từ A, B, C, D đến các tiếp điểm tương ứng.



Đặt $\overrightarrow{a_1} = AB\frac{\overrightarrow{IM}}{IM}$; $\overrightarrow{a_2} = BC\frac{\overrightarrow{IN}}{IN}$

$\overrightarrow{a_3} = CD\frac{\overrightarrow{IP}}{IP}$; $\overrightarrow{a_4} = DA\frac{\overrightarrow{IQ}}{IQ}$

Ta có $((\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4})\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})$

$$= \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{a_3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{a_3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{a_4}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{a_4}\overrightarrow{CB}$$
$$= (\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{a_4}\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{a_3}\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{a_3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{a_4}\overrightarrow{DC})$$
$$= \left|\overrightarrow{a_2}\right|.AD.\cos(\overrightarrow{a_2};\overrightarrow{AD}) + \left|\overrightarrow{a_4}\right|.CB.\cos(\overrightarrow{a_4};\overrightarrow{CB}) + \left|\overrightarrow{a_2}\right|.DC.\cos(\overrightarrow{a_2};\overrightarrow{DC}) + \left|\overrightarrow{a_3}\right|.CB.\cos(\overrightarrow{a_3};\overrightarrow{CB}) +$$
$$+ \left|\overrightarrow{a_3}\right|.AD.\cos(\overrightarrow{a_3};\overrightarrow{AD}) + \left|\overrightarrow{a_4}\right|.DC.\cos(\overrightarrow{a_4};\overrightarrow{DC})$$

Theo giả thiết $\left|\overrightarrow{a_1}\right| = AB; \left|\overrightarrow{a_2}\right| = BC; \left|\overrightarrow{a_3}\right| = CD; \left|\overrightarrow{a_4}\right| = DA$

Ngoài ra dễ thấy:

$$\cos(\overrightarrow{a_2};\overrightarrow{AD}) = -\cos(\overrightarrow{a_4};\overrightarrow{CB})$$
$$\cos(\overrightarrow{a_2};\overrightarrow{DC}) = -\cos(\overrightarrow{a_3};\overrightarrow{CB})$$
$$\cos(\overrightarrow{a_3};\overrightarrow{AD}) = -\cos(\overrightarrow{a_4};\overrightarrow{DC})$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}).\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Chứng minh tương tự ta có: $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}).\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow AB.\overrightarrow{IM} + BC.\overrightarrow{IN} + CD.\overrightarrow{IP} + DA.\overrightarrow{IQ} = \vec{0}$ (vì IM=IN=IP=IQ)

$\Leftrightarrow (x+y)\overrightarrow{IM} + (y+z)\overrightarrow{IN} + (z+t)\overrightarrow{IP} + (t+x)\overrightarrow{IQ} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (y\overrightarrow{IA} + x\overrightarrow{IB}) + (z\overrightarrow{IB} + y\overrightarrow{IC}) + (t\overrightarrow{IC} + z\overrightarrow{ID}) + (x\overrightarrow{ID} + t\overrightarrow{IA}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (y+t)(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (x+z)(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (y+t)\overrightarrow{IE} + (x+z)\overrightarrow{IF} = \vec{0} \Rightarrow$ I, E, F thẳng hàng.

2.3.4 Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Vân dụng các kiến thức và PPVT để giải quyết các bài toán về quan hệ vuông góc sẽ cho lời giải khá rõ ràng, ngắn gọn.

Thông thường với dạng toán trên, ta có thể qui về bài toán chứng minh hai đường thẳng song song, hay từ định nghĩa tích vô hướng của hai véctơ ta có thể suy ra:

- nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là 2 véctơ khác $\vec{0}$ thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

Vậy bài toán chứng minh 2 đường thẳng vuông góc có thể qui về bài toán chứng minh tích vô hướng của hai véctơ bằng O.

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC cân tại A; M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên AC, E là ttrung điểm của MH. Chứng minh rằng $AE \perp BH$

Hướng dẫn giải:

Bước 1. Tìm hiểu nội dung bài toán

Trước hết học sinh phải tìm hiểu bài toán một cách tổng thể: đây là dạng toán chứng minh 2 đường thẳng vuông góc. Tiếp theo phải phân tích bài toán đã cho.

- Bài toán cho biết gì? (cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên AC, E là trung điểm của MH).

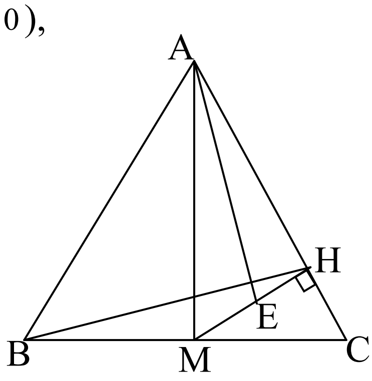
- Bài toán hỏi gì? (Chứng minh rằng $AE \perp BH$)

- Tìm mối liên hệ giữa cái phải tìm với cái đã cho.

Bước 2: Xây dựng chương trình giải:

Để chứng minh AE vuông góc BH, ta phải chứng minh những gì? (phải chứng minh đẳng thức véctơ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}=0$)

Để sử dụng giả thiết $AM \perp BC$ (hay $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$), và $MH \perp AC$ (hay $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AC}=0$), ta phải phân tích véctơ $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BH}$ theo những theo những véctơ nào?



Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}=?$

Bước 3: Thực hiện chương trình giải

$$2\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AH})(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MH})$$

$$=\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{AH}\,\overrightarrow{BM}$$

$$=\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{MH}+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH})\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MH}\,\overrightarrow{MC}$$

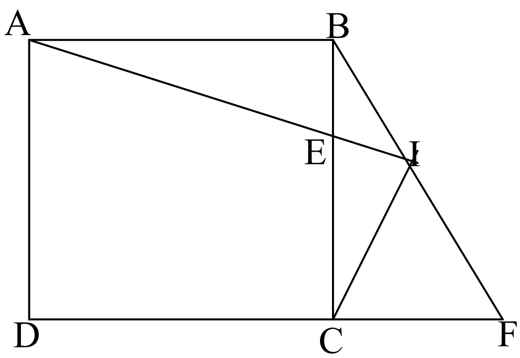
$$=\overrightarrow{HM}\,\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MH}\,\overrightarrow{MH}=-\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}^2=0$$

$$\Rightarrow AE \perp BH$$

Bước 4: - Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.

- Kiểm tra lại các bước giải của bài toán.

Vídụ 2: Cho hình vuông ABCD, E, F là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, đường thẳng AE cắt BF tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC}=90^0$



Hướng dẫn giải:

Bước 1. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Chọn 2 véctơ này làm véctơ cơ sở. Mọi véctơ trong bài toán đều phân tích (biểu diễn) được qua 2 véctơ này.

Bước 2. Giả thiết cho ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB \perp AD$ hay $\vec{a}.\vec{b}=0$

- Giả sử $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BF}$ .Vì A, E, I thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AI}$ cùng phương. Biểu diễn $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AI}$ theo 2 véctơ cơ sở $\vec{a}, \vec{b}$ sau đó dùng điều kiện cùng phương, ta sẽ tìm được k.

-Điều phải chứng minh là $\widehat{AIC}=90^0$, tương đương với $\overrightarrow{AI}\overrightarrow{CI} = 0$, với $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}$ đều phân tích được qua $\vec{a}, \vec{b}$ (để sử dụng giả thiết $\vec{a}\vec{b} = 0$)

<u>Bước 3.</u>

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}; |\vec{a}| = |\vec{b}| = a$ (a là độ dài cạnh hình vuông)

Ta có $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BF} = (1 + \frac{k}{2})\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}$$

$$= (1 + \frac{k}{2})\vec{a} + k\vec{b}$$

Vì $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AI}$ là 2 véctơ cùng phương nên:

$(1 + \frac{k}{2}) : 1 = k : \frac{1}{3} \Rightarrow 1 + \frac{k}{2} = 3k \Rightarrow k = \frac{2}{5}$. Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{6}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

Mặt khác $\qquad \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI} = (\frac{6}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b})(\frac{1}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}) = \frac{6}{25}a^2 - \frac{6}{25}a^2 = 0$$

$\Rightarrow AI \perp CI$

<u>Bước 4</u> - Kết luận $\widehat{AIC}=90^0$

- Kiểm tra lại lời giải.

<u>Nhận xét</u>: Qua 2 ví dụ trên, ta thấy rằng không phải lúc nào việc áp dụng qui trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT cũng được rõ ràng và thuận lợi. Vì vậy, trong quá trình giảng dạy, giáo viên cần phải linh hoạt trong việc hướng dẫn học sinh phương pháp tìm lời giải bài toán theo 4 bước của Pôlya hay sử dụng qui trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT.

***Hệ thống bài tập.**

Bài 1. (Bài 8-tr52-SGK HH_{10}-nâng cao)

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là $\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC} = AB^2$

Bài 2. (Bài11-tr40-SGK HH_{10} - nâng cao)

Tam giác MNP có MN=4, MP=8, $\widehat{M}=60^0$.Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP}$. Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC và H là điểm nằm trên đường thẳng BC. Chứng minh rằng $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC}\overrightarrow{MH}$ là điều kiện cần và đủ để AH $\perp$ BC.

Bài 4. Các đường AM, BE, CF là trung tuyến của tam giác ABC

a) Chứng minh rằng $BE^2 + CF^2 = 5AM^2$ là điều kiện cần và đủ để $\widehat{BAC} = 90^0$

b) Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$ là điều kiện cần và đủ để BE $\perp$ CF.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A, trên các cạnh AB, BC, CA ta lần lượt lấy các điểm M, N, E sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CE}{EA}$..Chứng minh rằng: AN $\perp$ ME.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC. Lấy các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ gọi I là giao điểm của AM và CN. Chứng minh rằng góc $\widehat{BIC} = 90^0$.

Bài 7. Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). D là trung điểm của AB, E là trọng tâm của tam giác ADC. Chứng minh rằng OE $\perp$ CD

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). B' là điểm đối xứng của B qua O. (I) tiếp xúc với các cạnh BA, BC tại P, Q. Trên BA, BC lấy các điểm K, L sao cho BK = CQ, BL= AP. Chứng minh rằng B'I $\perp$ KL

<u>Bài 9</u>. Cho tam giác ABC. Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Trên các tia BA,CA lấy các điểm E, F sao cho EB = BC = CF. Chứng minh rằng OI $\perp$ EF.

<u>Bài 10.</u> Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác có 2 đường chéo vuông góc là tổng bình phương các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

<u>Bài 11</u>. (Bài 22 - Tr 41- SBT- HH_{10} - Nâng cao)

Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M, gọi P là trung điểm đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng MP$\perp$ BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

<u>Bài 12</u>. Các đường chéo của tứ giác ABCD là vuông góc và bằng nhau. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lần lượt lấy các điểm P, Q, R, S sao cho:

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}; \overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{QC}; \overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{RD}; \overrightarrow{DS} = k\overrightarrow{SA} (k \neq -1)$

Chứng minh SQ$\perp$PR

<u>Bài 13.</u> (Bài 23 - Tr 41- SBT- HH_{10} - Nâng cao)

Cho hình vuông ABCD, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

<u>Bài 14.</u> Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BK vuông góc với AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Chứng minh rằng góc BMN vuông.

<u>Bài 15</u>. Cho hình vuông ABCD. Các điểm M, N thuộc các cạnh BA, BC sao cho BM=BN. H là hình chiếu của B trên CM.Chứng minh rằng $\widehat{DHN}=90^0$

<u>Bài 16</u>. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O;R). Chứng minh rằng

AC$\perp$BD $\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = 4R^2$

<u>Bài 17</u>. (Bài 32 - Tr 43- SBT- HH_{10} - Nâng cao)

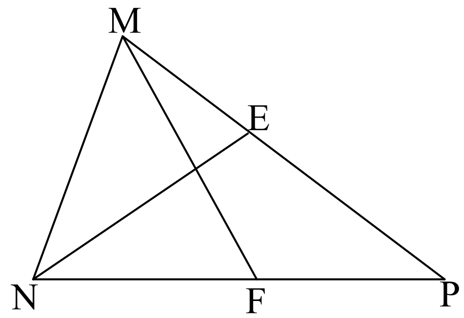
Trong đường tròn ξ(O;R) cho hai dây cung AA’, BB’ vuông góc với nhau ở điểm S và gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng SM$\perp$A’B’.

Bài 18 (Bài 35 - Tr 43- SBT- HH_{10} - Nâng cao)

Cho điểm M nằm trong góc $\widehat{xOy}$ và gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Vẽ đường tròn (ξ) qua M_1, M_2, đường tròn này cắt 2 cạnh Ox, Oy lần lượt ở N_1, N_2. Kẻ đường thẳng vuông góc Ox ở N_1 và đường thẳng vuông góc với Oy ở N_2. Giả sử 2 đường thẳng đó vuông góc với nhau ở N. Chứng minh $ON \perp M_1M_2$.

Hướng dẫn hoặc lời giải.

Bài 2.



Ta có $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})$$

$$NE \perp MF \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})(k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\overrightarrow{MN}.(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})}{\overrightarrow{MP}.(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})} = \frac{\overrightarrow{MN}\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}^2}{\overrightarrow{MN}\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP}^2} = \frac{16+16}{64+16} = \frac{2}{5}$$

Bài 3.

Ta có $AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AM}\overrightarrow{CB}$

$$= 2(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}).\overrightarrow{CB}$$

$$= 2\overrightarrow{AH}\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{HM}\overrightarrow{CB}$$

Nếu $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AH}\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{HM}\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MH}\overrightarrow{BC}$

Nếu $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC}\overrightarrow{MH} \Rightarrow \overrightarrow{AH}\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow AH \perp BC$

Bài 4.

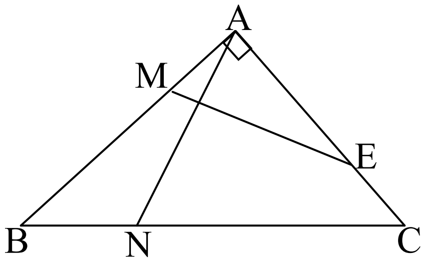
Sử dụng đẳng thức $2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}, 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2}$$

Bài 5.

Đặt $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CE}{EA} = k; \overrightarrow{AB} = \vec{a}; \overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Ta có $\vec{a}\vec{b} = 0$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{CA}$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{k+1}\vec{a} + \frac{k}{k+1}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AE} - \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{-k}{k+1}\vec{a} + \frac{1}{k+1}\vec{b}$$

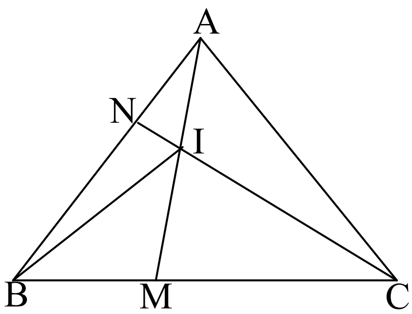
$\overrightarrow{AN}\,\overrightarrow{ME} = (\frac{1}{k+1}\vec{a} + \frac{k}{k+1}\vec{b})\ (\frac{-k}{k+1}\vec{a} + \frac{1}{k+1}\vec{b}) = 0$. Vậy AN $\perp$ ME.

Bài 6.

Đặt $\overrightarrow{BC} = \vec{a}; \overrightarrow{BA} = \vec{b}$. Vì tam giác ABC đều nên $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Giả sử $\overrightarrow{IA} = x\overrightarrow{IM}\,(x \neq 1)$

$\overrightarrow{IN} = y\overrightarrow{IC}(y \neq 1)$



Ta có $\overrightarrow{BI} = \dfrac{\overrightarrow{BA} - x\overrightarrow{BM}}{1-x}$

$$= \frac{1}{1-x}\overrightarrow{BA} - \frac{x}{3(1-x)}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{-x}{3(1-x)}\vec{a} + \frac{1}{1-x}\vec{b}$$

Mặt khác $\overrightarrow{BI} = \dfrac{\overrightarrow{BN} - y\overrightarrow{BC}}{1-y} = -\dfrac{y}{1-y}\vec{a} + \dfrac{2}{3(1-y)}\vec{b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{3}(1-y) \\ \dfrac{x}{3(1-x)} = \dfrac{y}{1-y} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-1}{6}$$

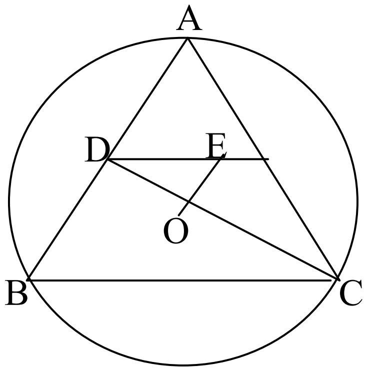
Vậy $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}; \overrightarrow{NC} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BI}\,\overrightarrow{NC} = (\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b})(\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}) = a^2(\frac{1}{7} + \frac{4}{7}.\frac{1}{2} - \frac{2}{21}.\frac{1}{2} - \frac{8}{21}) = 0$$

Vậy BI $\perp$ CN

Bài 7.

Ta có:



$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC})$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC})$$

$$= \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC})$$

Do đó $2\overrightarrow{CD}.6\overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})\ (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC})$

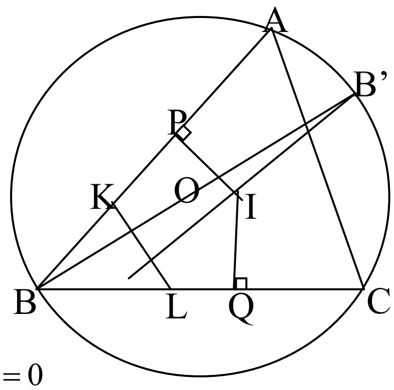
$$= 3OA^2 + OB^2 - 4OC^2 + 4\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}$$

$$= 4\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 4\overrightarrow{OA}\overrightarrow{CB} = 0$$

Vậy $\overrightarrow{CD}\overrightarrow{OE} = 0$, tức là OE$\perp$CD.

Bài 8.

Ta có:



$$\overrightarrow{IB'}.\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IB'}.(\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{BK})$$

$$= \overrightarrow{IB'}.\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{IB'}.\overrightarrow{BK}$$

$$= \overrightarrow{QC}.\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{BK}$$

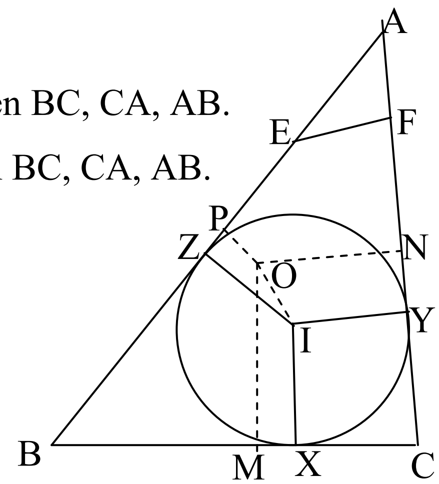
$$= BL.QC - BK.PA = QC.PA - PA.QC = 0$$

Vậy IB'$\perp$KL

Bài 9.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của O tren BC, CA, AB.

X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB.



Ta có: $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OI}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF})$

$$= \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{CF}$$

$$= \overrightarrow{PZ}.\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MX}.\overrightarrow{BC}. + \overrightarrow{NY}.\overrightarrow{CF}$$

$$= (\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BZ})\overrightarrow{BE} + (\overrightarrow{BX} - \overrightarrow{BM})\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CY} - \overrightarrow{CN}).\overrightarrow{CF}$$

$$= \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BZ}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BX}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CY}.\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CN}.\overrightarrow{CF}$$

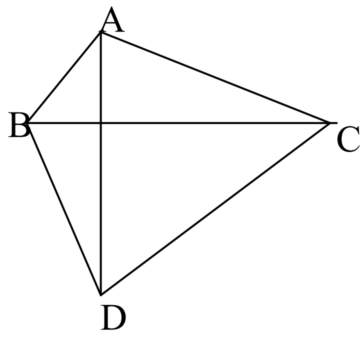
$$= \frac{c}{2}a - (p-b)a + (p-b)a - \frac{a}{2}a + (p-c)a - \frac{b}{2}a$$

$$= \left(\frac{c}{2} - p + b + p - b - \frac{a}{2} + p - c - \frac{b}{2}\right)a = O$$

Suy ra OI $\perp$ EF

Bài 10.

Trong mọi tứ giác ABCD ta có:



$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 =$$
$$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$$
$$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})\overrightarrow{CA}$$
$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$$
$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})$$
$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}) = 2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{DB}$$

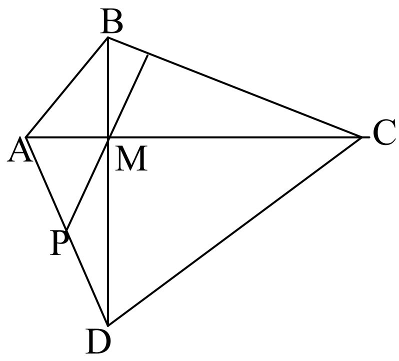
Như vậy trong mọi tứ giác ABCD, ta có hệ thức sau:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{DB}$$

$$AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow$$
$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$$

Bài 11.

$$2\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$$



$$= \overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\,\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB}$$
$$= \overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\,\overrightarrow{MB}$$

(Vì $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}\,\overrightarrow{MC} = 0$ do AC$\perp$BD)

Từ đó ta có:

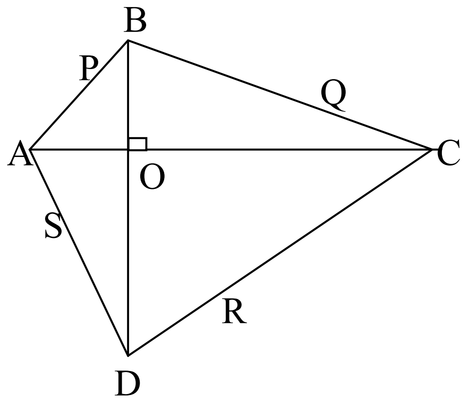
$$MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\,\overrightarrow{MD}$$

Bài 12.

Giả sử AC cắt BD tại O do $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}$

$\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{QC}; \overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{RD}; \overrightarrow{DS} = k\overrightarrow{SA}$ (k$\neq -1$).

Nên:



$$\begin{cases} \overrightarrow{OR} = \dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{OC} + \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{OA} + \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OQ} = \dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{OB} + \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OS} = \dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{OD} + \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{OA} \end{cases}$$

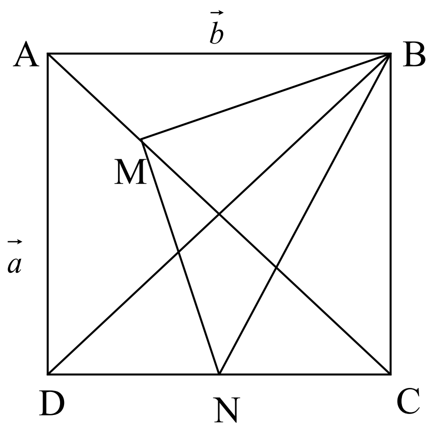
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ} = \dfrac{-k}{1+k}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{BD} \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{QS} = \dfrac{k}{(1+k)^2}BD^2 - \dfrac{1}{(1+k)^2}.AC^2 = O$

$\Rightarrow RP \perp QS$

<u>Bài 13</u>

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}; \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ khi đó ta có



$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b}}{2}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$

$= \vec{b} - \dfrac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \dfrac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b}}{2} - \dfrac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$

$= \dfrac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b})$

Ta có $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b}).(3\vec{a} + \vec{b})$

$$= \frac{1}{16}(-3\overrightarrow{a^2} + 3\vec{b}^2 + 8\vec{a}.\vec{b}) = O$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = \frac{1}{16}(-\vec{a}+3\vec{b})^2 = \frac{1}{16}(\overrightarrow{a^2}+9\overrightarrow{b^2}-6\vec{a}.\vec{b}) = \frac{5}{8}\overrightarrow{a^2}$$

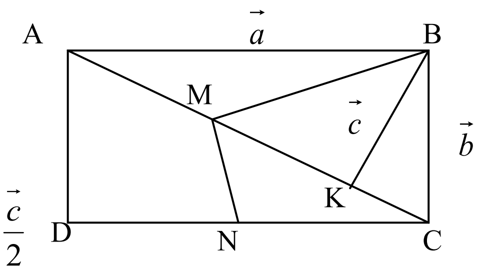
$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a}+\vec{b})^2 = \frac{1}{16}(9\overrightarrow{a^2}+\vec{b}^2+6\vec{a}.\vec{b}) = \frac{5}{8}\overrightarrow{a^2}$$

Vậy MB $\perp$ MN và MB = MN, tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M

<u>Bài 14:</u>

Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a}; \overrightarrow{BC}=\vec{b}; \overrightarrow{BK}=\vec{c}$ Khi đó ta có $\vec{a}.\vec{b}=O; (\vec{a}-\vec{b}).\vec{c}=O$ Ta có

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BK}) = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$.



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

$= -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{BA}}{2} = -\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}) + \vec{b} + \frac{\vec{a}}{2} = \vec{b} - \frac{\vec{c}}{2}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MN} = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\frac{\vec{c}}{2} + \vec{b}.\vec{c} - \frac{\vec{c}^2}{2}$

$= -\frac{c^2}{2} + c^2 - \frac{c^2}{2} = O$ Vậy góc BMN vuông

<u>Bài 15:</u>

Đặt a là độ dài các cạnh của hình vuông, $\alpha = \widehat{MBH} = \widehat{BCH}$

Ta có: $\overrightarrow{HN}.\overrightarrow{HD} = (\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BN})(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{HC}$

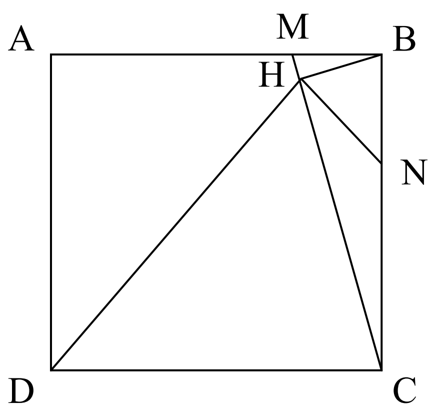
(Vì $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{HC}; \overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{CD}$)

$= \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{HC}$

$= -HB.a.Cos\alpha + NB.CH.Cos\alpha$

$= -MB.a.Cos^2\alpha + NB.a.Cos^2\alpha$

$= O$ (Vì $MB = NB$)

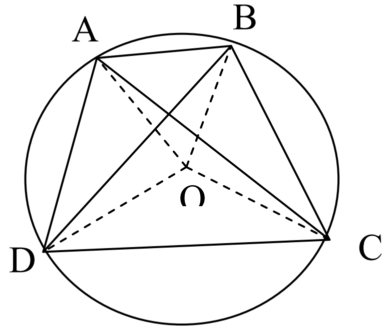


Bài 16:

$AB^2 + CD^2 = \left((\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})^2\right)$

$= 4R^2 - 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD})$

$= 4R^2 - 2R^2(Cos\widehat{AOB} + Cos\widehat{COD})$



Do đó $AB^2 + CD^2 = 4R^2$

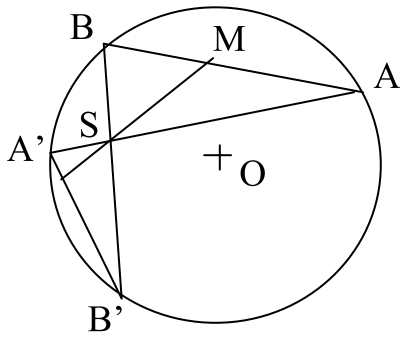
$\Leftrightarrow Cos\widehat{AOB} + Cos\widehat{COD} = O$

$\Leftrightarrow \widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^0$

$\Leftrightarrow AC \perp BD$

Bài 17

Xét tích vô hướng



$\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}).(\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA'})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA'})$

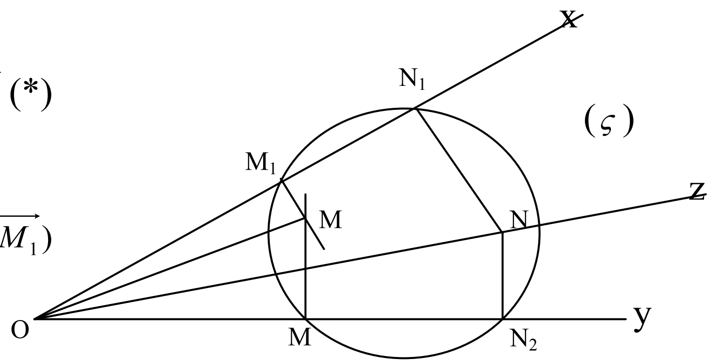
Ta có: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB'} = O$ *do* $SA \perp SB'$

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA'} = O$ *do* $SB \perp SA'$

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB'}$

Tư đó suy ra: $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{A'B'} = O$ *Nên* $SM \perp A'B'$

Bài 18:



Ta có: $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{ON_1} = \overrightarrow{OM_2}.\overrightarrow{ON_2}$ (*)

Xét tích vô hướng

$\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{ON}(.\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})$

$= \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_1}$

$= \overrightarrow{OM_2}.\overrightarrow{ON_2} - \overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{ON_1}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{M_1M_2} = O$ Hay $ON \perp M_1M_2$

2.3.5 Chứng minh đẳng thức véctơ

Đẳng thức véctơ là một đẳng thức mà cả hai vế là các biểu thức véctơ. Mỗi biểu thức chứa các hạng tử là véctơ và chúng được nối với nhau bởi các dấu của các phép toán véctơ hoặc một trong hai vế của đẳng thức là $\vec{O}$ (hoặc O).

Để chứng minh các bài tập dạng này, chủ yếu ta sử dụng các quy tắc 3 điểm, quy tắc hình bình hành để dựng các véctơ được cho ở hai vế của đẳng thức, sử dụng công thức trọng tâm của tam giác, trung điểm của đoạn thẳng, tính chất của các phép toán, các tính chất của tích vô hướng của hai véctơ để rút gọn hai vế...

<u>Ví dụ 1</u>: Chứng minh rằng với 4 điểm A,B,C,D ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=O$ (*)

<u>Hướng dẫn giải:</u>

<u>Bước 1</u>: Chọn véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ làm các véctơ cơ sở. Mọi véctơ xuất hiện trong bài toán đều phân tích được qua các véctơ này.

<u>Bước 2</u>: Bài toán đã cho dưới dạng ngôn ngữ véctơ.

<u>Bước 3</u>: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=$

$$=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$
$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$$
$$=(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD})=O$$

<u>Bước 4</u> Nhận xét:

1. Đẳng thức véctơ (*) được gọi là hệ thức Ơle. Có thể dùng hệ thức Ơle để chứng minh: Trong tam giác 3 đường cao đồng quy.

Thật vậy, giả sử các đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC cắt nhau tại H. Áp dụng hệ thức Ơle cho 4 điểm H, A, B, C ta có:

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=O$

Do HB$\perp$ CA, HC $\perp$AB nên $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = O$ từ đó $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = O$ tức HA$\perp$ BC

2. Kết quả vừa chứng minh là sự mở rộng đẳng thức

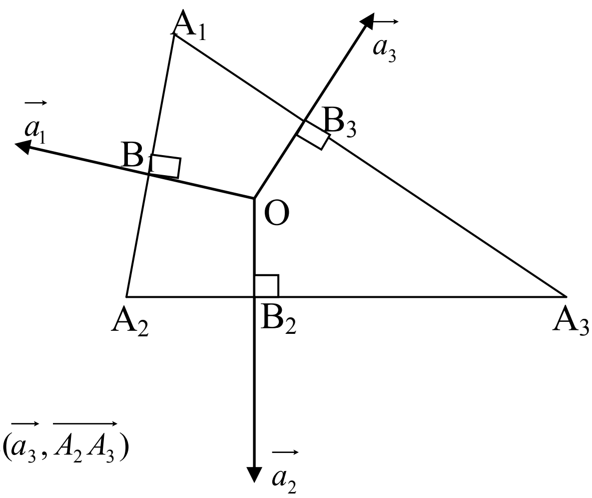
$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = O$ khi A,B,C,D nằm trên một đường thẳng.

<u>Ví dụ 2</u>: (Bài 28- tr42- SBT- Hình học 10 - nâng cao)

Cho một điểm O bất kỳ nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$ Gọi B_1, B_2, B_3 lần lượt là hình chiếu của O trên A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1.

Đặt $\vec{a_1} = A_1A_2.\dfrac{\overrightarrow{OB_1}}{OB_1}; \vec{a_2} = A_2A_3.\dfrac{\overrightarrow{OB_2}}{OB_2}; \vec{a_3} = A_3A_1.\dfrac{\overrightarrow{OB_3}}{OB_3}$

Chứng minh rằng: $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3} = \vec{o}$



<u>Hướng dẫn giải</u>:

Ta có:

$$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})\overrightarrow{A_1A_2} = (\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})\overrightarrow{A_1A_2}$$
$$= (\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})(\overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_2A_3})$$
$$= \overrightarrow{a_2}\,\overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{a_3}\,\overrightarrow{A_2A_3}$$
$$= \left|\overrightarrow{a_2}\right| A_1A_3 \cos(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{A_1A_3}) - \left|\overrightarrow{a_3}\right| A_2A_3 \cos(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{A_2A_3})$$

Theo giả thiết: $\left|\overrightarrow{a_2}\right| = A_2A_3; \left|\overrightarrow{a_3}\right| = A_1A_3$

Ngoài ra dễ thấy: $\cos(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{A_1A_3}) = \cos(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{A_2A_3})$

$\Rightarrow (\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})\overrightarrow{A_1A_2} = 0$. Do đó véctơ $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})$

vuông góc với đường thẳng A_1A_2

Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta có véctơ $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})$ vuông góc với đường thẳng A_2A_3.

Vậy $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}) = \vec{0}$.

Nhận xét:

1) Cho điểm O trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ là điểm I, ta được kết quả sau: $a\overrightarrow{IB_2}+b\overrightarrow{IB_3}+c\overrightarrow{IB_1}=\vec{0}$

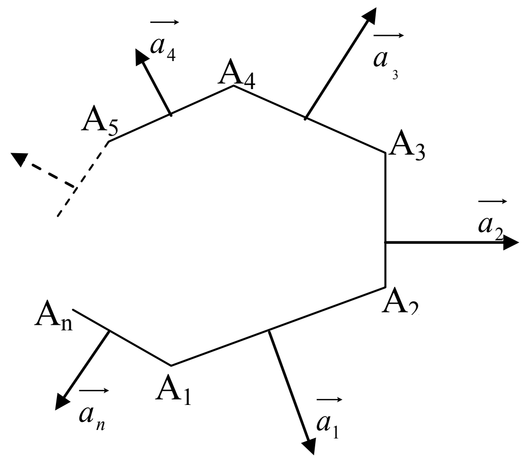
Với $a=A_2A_3$, $b=A_3A_1$, $c=A_1A_2$

2) Kết quả trên đúng với đa giác $A_1A_2.....A_n$ bất kì (định lí Con nhím). Với:

. $\left|\overrightarrow{a_k}\right| = A_kA_{k+1}$ (xem $A_{n+1}\equiv A_1$)

. $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+.......+\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$.

(Các véctơ $\overrightarrow{a_k}$ được gọi là các "lông nhím")



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và $A_1A_2A_3$ có cùng trọng tâm G. G_1, G_2, G_3 lần lượt là các trọng tâm của các tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

Hướng dẫn giải:

G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1, ta có: $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1A_1}=\vec{0}$

Hay $\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GA_1}=\vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA_1}$ (1)

Tương tự, ta có: $3\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC_1}$ (2)

$3\overrightarrow{GG_3}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB_1}$ (3)

Cộng từng vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta có:

$3(\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3})=2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1})$

Do G đồng thời là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ nên suy ra:

$(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1})=\vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

***Hệ thống bài tập.**

Bài 1. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Chứng minh rằng

1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$

2. $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

3. $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2c^2)$, với a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác ABC.

4. Nếu tam giác ABC nội tiếp (O;R) thì: $OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2c^2)$

5. Nếu trọng tâm G của tam giác ABC thõa mãn diều kiện $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ thì tam giác ABC đều.

Bài 2. Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm. I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh:

1. $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (a, b, c là độ dài các cạnh tam giác ABC)

2. $\tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

3. $S_a.\overrightarrow{MA}+S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, trong đó M là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC, S_a, S_b, S_c theo thứ tự là diện tích của tam giác MBC, MCA, MAB.

4. $a.IA^2+b.IB^2+c.IC^2=abc$.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC tâm O, M là điểm bất kì tong tam giác. Hạ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

Bài5. Cho tứ giác ABCD và số $k\neq 0$; $k\neq 1$. Trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA ta lấy các điểm tương ứng A', B', C', D' sao cho:

$\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{C'D}, \overrightarrow{DD'} = k\overrightarrow{D'A}$. Gọi O là trọng tâm của tứ giác ABCD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$

<u>Hướng dẫn hoặc lời giải</u>

<u>Bài 1.</u>

1. Đây chính là hệ thức Ơle đã chứng minh ở ví dụ 1.

2. Ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$\Rightarrow$ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ (1)

<u>Nhận xét:</u>

- Điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.

- Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R) thì:

$3(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2$ (lấy M trùng với điểm O)

3. Cho M $\equiv$A thì (1) thành $c^2 + b^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$

Cho M $\equiv$G thì (1) thành $a^2 + c^2 = GA^2 + 4GB^2 + GC^2$

Cho M $\equiv$C thì (1) thành $b^2 + c^2 = GA^2 + GB^2 + 4GC^2$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được:

$2(a^2 + b^2 + c^2) = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2c^2)$$

4. Cho M$\equiv$O thì (1) thành:

$3R^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$$\Rightarrow OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}((a^2 + b^2c^2)$$

5. $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = a(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$\Rightarrow (b - a)\overrightarrow{GB} = (a - c)\overrightarrow{GC}$.

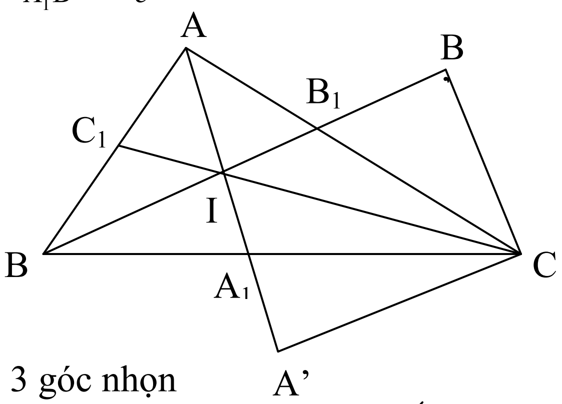
- Nếu b-a $\neq$O, thì $\overrightarrow{GB} = \frac{a-c}{b-a}\overrightarrow{GC}$ điều đó chứng tỏ $\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$ đồng phương. Điều này vô lý, vậy b= a $\Rightarrow$(c-a)$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$

$\Rightarrow$c- a $\Rightarrow$ c= a Vậy Δ ABC đều

<u>Bài 2:</u> Ta sử dụng phương pháp phân tích một véctơ theo hai véctơ không cùng phương để giải ví dụ này

a) Phân tích $\overrightarrow{IC}$ theo $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$

Dựng hình bình hành IA'CB' ta có $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IA'} = \alpha\overrightarrow{IB} + \beta\overrightarrow{IA}$ vì véctơ $\overrightarrow{IB'}$ và $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng nên $\alpha = -\frac{IB'}{IB} = -\frac{A_1C}{A_1B} = -\frac{b}{c}$ (tính chất phân giác)



Tương tự $\beta = -\frac{IB'}{IA} = -\frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{a}{c}$

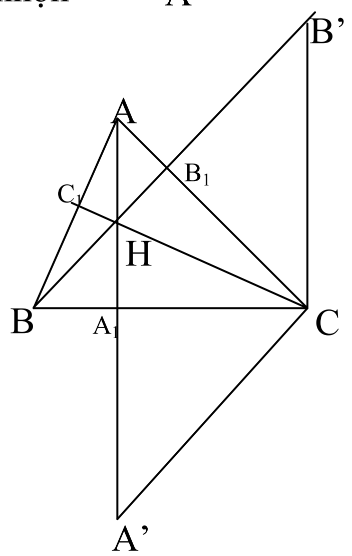
Vậy $\overrightarrow{IC} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} - \frac{a}{c}.\overrightarrow{IA}$

$\Rightarrow a.\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}$

b) Xét trường hợp tam giác ABC có 3 góc nhọn

- Dựng hình bình hành HA'CB' ta có

$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} = \alpha.\overrightarrow{HA} + \beta.\overrightarrow{HB}$ ta có



$$\alpha = -\frac{HA'}{HA} = -\frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{BB_1.CotC}{BB_1.CotA} = -\frac{\tan A}{\tan C}$$

$$\beta = -\frac{HB'}{HB} = -\frac{A_1C}{A_1B} = -\frac{AA_1.CotC}{AA_1.CotB} = -\frac{\tan B}{\tan C}$$

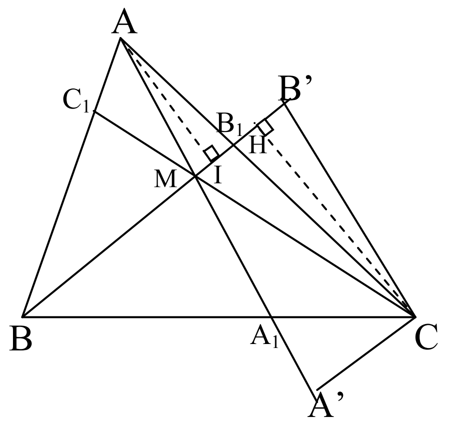
Vậy $\overrightarrow{HC} = -\frac{\tan A}{\tan C}.\overrightarrow{HA} - \frac{\tan B}{\tan C}.\overrightarrow{HB}$

Hay $\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{O}$

Chứng minh tương tự cho trường hợp tam giác có 1 góc tù

c) Cách 1:

Gọi giao điểm của các tia AM, BM, CM với BC, CA, AB lần lượt là A_1, B_1, C_1



Dựng hình bình hành MA'CB', ta có:

. $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$

. $\alpha = -\dfrac{MA'}{MA} = -\dfrac{B_1C}{B_1A} = -\dfrac{CH}{AI} = -\dfrac{S_{MBC}}{S_{MAB}} = -\dfrac{S_a}{S_b}$

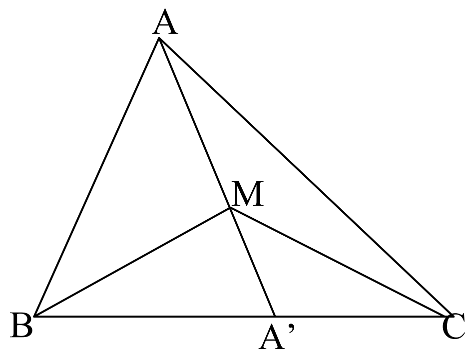
Tương tự: $\beta = -\dfrac{S_b}{S_c}$

Vậy $\overrightarrow{MC} = -\dfrac{S_a}{S_c}\overrightarrow{MA} - \dfrac{S_b}{S_c}\overrightarrow{MB}$

$$\Rightarrow S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Cách 2:

Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC



Ta có: $\overrightarrow{A'B} = -\dfrac{A'B}{A'C}\overrightarrow{A'C}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{\overrightarrow{MB} + \dfrac{A'B}{A'C}\overrightarrow{MC}}{1 + \dfrac{A'B}{A'C}} = \frac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$$

Nhưng $\dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_b}{S_c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A'C}{BC} = \dfrac{S_b}{S_b + S_c} \\ \dfrac{A'B}{BC} = \dfrac{S_c}{S_b + S_c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{S_b}{S_b + S_c}\overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c}\overrightarrow{MC} \qquad (*)$$

Mặt khác: $\dfrac{MA'}{MA} = \dfrac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \dfrac{S_{MA'B} + S_{MA'C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \dfrac{S_a}{S_b + S_c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = -\dfrac{S_a}{S_b + S_c}\overrightarrow{MA}$. Thay vào (*) ta được:

$$-S_a\overrightarrow{MA} = S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} \Rightarrow S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Nhận xét:

- Cho M trùng với trọng tâm tam giác ABC, ta được kết quả: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta được kết quả câu a).

- Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, ta có:

$x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Trong đó x, y, z là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

- Nếu M nằm ngoài tam giác ABC, chẳng hạn M thuộc góc $\widehat{BAC}$, chứng minh tương tự ta có kết quả: $-S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

d) Cách 1. Theo kết quả câu a) ta có:

$$a.\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}\Rightarrow(a.\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC})^2=0$$

$$\Rightarrow a^2.IA^2+b^2.IB^2+c^2.IC^2+2ab\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB}+2ac\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IC}+2bc\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IB}=0$$

$$\Rightarrow a^2.IA^2+b^2.IB^2+c^2.IC^2+ab(IA^2+IB^2-AB^2)+bc(IB^2+IC^2-BC^2)+ca(IC^2+IA^2-CA^2)=0$$

$$\Rightarrow(a^2+ab+ca)IA^2+(b^2+ba+bc)IB^2+(c^2+ca+cb)IC^2-(abc^2+ab^2c+a^2bc)=0$$

$$\Rightarrow(a+b+c)(aIA^2+bIB^2+cIC^2)=(a+b+c)abc$$

$$\Rightarrow aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$$

Cách 2. Gọi H, K là hình chiếu của I trên AB, AC. Từ hệ thức $a.\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$, ta có:

$$\begin{aligned}aIA^2+bIB^2+cIC^2&=(-b\overrightarrow{IB}-c\overrightarrow{IC})\overrightarrow{IA}+bIB^2+cIC^2\\&=b\overrightarrow{IB}(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA})+c\overrightarrow{IC}(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA})\\&=b\overrightarrow{IB}\,\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{IC}\,\overrightarrow{AC}\\&=b\overrightarrow{HB}\,\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{KC}\,\overrightarrow{AC};(1)\end{aligned}$$

Vì véctơ $\overrightarrow{HB}$ và véctơ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng, véctơ $\overrightarrow{KC}$ và véctơ $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng nên:

$\overrightarrow{HB}\,\overrightarrow{AB}=HB.AB=(p-b)c;\overrightarrow{KC}\,\overrightarrow{AC}=KC.AC=(p-c)b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = b(p-b)c + c(p-c)b = (p-b+p-c)ab = abc$$

Nhận xét:

Bằng phương pháp của cách 1, ta có thể chứng minh được kết quả tổng quát hơn:

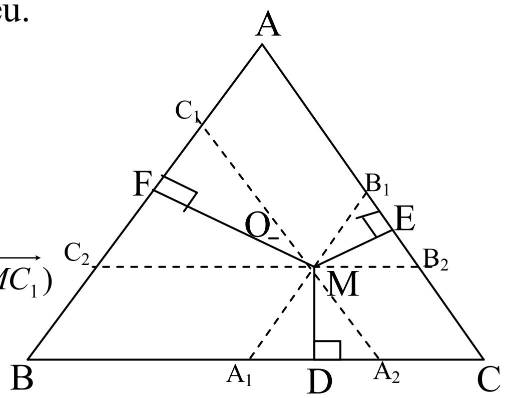
- Cho tam giác ABC. Điểm I xác định bởi:

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}; (\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$$

ta có: $\alpha.IA^2 + \beta.IB^2 + \gamma.IC^2 = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha.\beta.c^2 + \beta.\gamma.a^2 + \gamma.\alpha.b^2)$

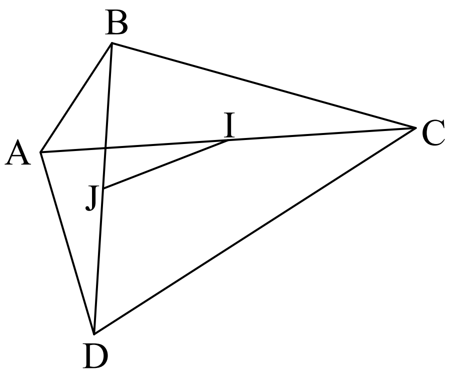
Bài 3.

Qua M ta kẻ các đường thẳng song song: B_2C_2 song song BC, A_2C_1 song song AC, A_1B_1 song song AB. Ta được các tam giác MA_1A_2, tam giác MB_1B_2, tam giác MC_1C_2 là các tam giác đều.



Ta có:

$$\begin{aligned}
&2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = \\
&= \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} \\
&= (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2}) + (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_2}) + (\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}) \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\
&= 3\overrightarrow{MG} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$



Bài 4.

Ta có:

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

$$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2$$
$$\Leftrightarrow (AD^2 - AC^2) - (BD^2 - BC^2) = 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}$$
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}$$

Bài 5.

Ta có:

$$\overrightarrow{A'A} = -k\overrightarrow{A'B} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{OB}}{1+k}$$
$$\overrightarrow{B'B} = -k\overrightarrow{B'C} \Rightarrow \overrightarrow{OB'} = \frac{\overrightarrow{OB} + k.\overrightarrow{OC}}{1+k}$$
$$\overrightarrow{C'C} = -k\overrightarrow{C'D} \Rightarrow \overrightarrow{OC'} = \frac{\overrightarrow{OC} + k.\overrightarrow{OD}}{1+k}$$
$$\overrightarrow{D'D} = -k\overrightarrow{D'A} \Rightarrow \overrightarrow{OD'} = \frac{\overrightarrow{OD} + k.\overrightarrow{OA}}{1+k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OD}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OA}}{1+k}$$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ (Vì O là trọng tâm của tứ giác ABCD)

2.3.6 Các bài toán tìm tập hợp điểm

Trong hình học phẳng thường chỉ đề cập đến bài toán quỹ tích của điểm M chuyển động trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện nào đó.

Bằng phương pháp tổng hợp chỉ nghiên cứu bài toán quỹ tích trên các bài toán quỹ tích cơ bản. Bằng phương pháp véctơ nghiên cứu quỹ tích của điểm M chuyển động trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện nào đó (ta gọi tính chất α) theo nguyên tắc chung là phải thiết lập được tính tương ứng giữa tính chất α với các điều kiện của các véctơ có liên quan đến điểm M và từ đó mô tả hình H= (M/M có tính chất α) Do đó phạm vi nghiên cứu được mở rộng hơn và nhiều bài cho lời giải khá dễ dàng

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k(k \in R)$

b) $2MB^2 + \overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} = a^2$(a là độ dài cạnh BC)

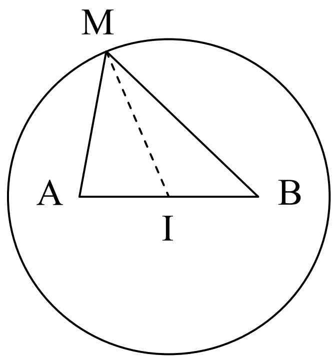
c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC} = MC^2 - MB^2 + BC^2$

d) $3MA^2 = 2MB^2 + MC^2$

e) $2MA^2 - 3MB^2 + 5MC^2 = k \ (k \in R)$

Hướng dẫn giải:

a) Gọi I là trung điểm của AB



$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k$

$\Leftrightarrow IM^2 - IA^2 = k$

$\Leftrightarrow IM^2 = \dfrac{AB^2}{4} + k$

* Nếu $\dfrac{AB^2}{4} + k > O \Leftrightarrow k > -\dfrac{AB^2}{4}$ Tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\dfrac{AB^2}{4} + k}$.

* Nếu k =- $\dfrac{AB^2}{4}$ $\Rightarrow$IM =O $\Leftrightarrow$ tập hợp M là điểm I.

* Nếu $\dfrac{AB^2}{4} + k < O \Leftrightarrow k < -\dfrac{AB^2}{4}$ $\Leftrightarrow$ tập hợp điểm M là tập rỗng.

* Nếu $k = O$ ta có ngay $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = O \Leftrightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AB.

b) $2.MB^2 + \overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}(2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = a^2$ (1)

Chọn điểm K thỏa mãn: $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. K cố định.

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MK}$$

. (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MK} = \dfrac{a^2}{3}$

. Gọi I là trung điểm của BK, và biến đổi như ở câu a) ta được:

$(1) \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{BK^2}{4} + \dfrac{a^2}{3}$. Có thể thấy $BK = \dfrac{a}{3}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow IM^2 = \dfrac{13a^2}{36} \Leftrightarrow IM = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$.

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\dfrac{a\sqrt{13}}{6}$.

c) $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC} = MC^2 - MB^2 + BC^2$

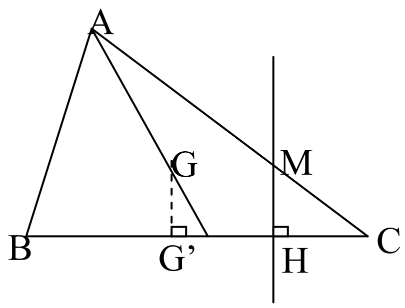
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC} - MC^2 + MB^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = BC^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = BC^2$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}\overrightarrow{CB} = BC^2$ (2) (G là trọng tâm tam giác ABC)

Goi H và G' lần lượt là hình chiếu của M và G lên BC, ta có:

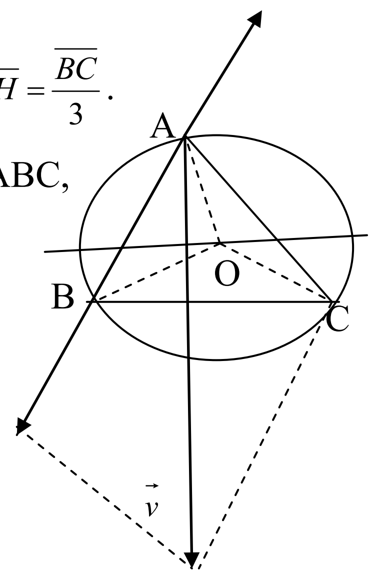


(2) $\Leftrightarrow 3\overline{G'H}\,\overline{BC} = BC^2 \Leftrightarrow \overline{G'H} = \dfrac{\overline{BC}}{3}$

A, B, C, G, G' cố định, suy ra H cố định.

Vậy tập hợp những điểm M là đường thẳng vuông góc với BC tại điểm H xác định bởi $\overline{G'H} = \dfrac{\overline{BC}}{3}$.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có:



$MA^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$

$MB^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = MO^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$

$MC^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = MO^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}$

Ta có: $3MA^2 = 2MB^2 + MC^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) + 3OA^2 - 2OB^2 - OC^2 = 0\,(1)$

Mặt khác: OA=OB=OC (bán kính)

$\Rightarrow 3OA^2 - 2OB^2 - OC^2 = 0$

Và $3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = -(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.Đặt $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{v}$ là một véctơ cố định, do đó (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\vec{v} = 0$. Vậy tập hợp những điểm M là đường thẳng qua O và vuông góc với véctơ $\vec{v}$.

Nhận xét:

- Cách giải câu d) có thể tổng quát hóa cho trường hợp M di động thỏa mãn: $\alpha.MA^2 + \beta.MB^2 + \gamma.MC^2 = k$ với $\alpha + \beta + \gamma = 0$ và k là số cho trước.

e) Gọi I là điểm cố định thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Ta có: $k = 2MA^2 - 3MB^2 + 5MC^2$

$$\begin{aligned} &= 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 - 3(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 + 5(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM})^2 \\ &= 2IA^2 - 3IB^2 + 5IC^2 + 4IM^2 + 2\overrightarrow{IM}(-2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 5\overrightarrow{IC}) \\ &= 2IA^2 - 3IB^2 + 5IC^2 + 4IM^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow IM^2 = \frac{k - 2IA^2 + 3IB^2 - 5IC^2}{4} = P$$

. P<o $\Leftrightarrow$ k< $2IA^2-3IB^2+5IC^2$ $\Rightarrow$ Tập hợp những điểm M là tập ỉ

. P=0 $\Leftrightarrow$ k= $2IA^2-3IB^2+5IC^2$ $\Rightarrow$ Tập hợp những điểm M là điểm I.

. P>0 $\Leftrightarrow$ k> $2IA^2-3IB^2+5IC^2$ $\Rightarrow$ Tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{P} = \sqrt{\dfrac{k - 2IA^2 + 3IB^2 - 5IC^2}{4}}$

Nhận xét:

.Cách giải câu e) có thể tổng quát cho điểm M di động thỏa mãn $\alpha.MA^2 + \beta.MB^2 = k$ với $\alpha + \beta \neq 0$ hay $\alpha.MA^2 + \beta.MB^2 + \gamma.MC^2 = k$ với $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Với giá trị k thích hợp, tập hợp là đường tròn tâm I, điểm cố định định bởi $\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ hay $\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta.\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ví dụ 2: Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AM} = k$.

Hướng dẫn giải:

Ta tiến hành biến đổi điều kiện bài toán về dạng quen thuộc. Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AM} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = k$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}.\overline{AH} = k \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$$

điều này chứng tỏ H là điểm cố định. Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với AH tại H.

Chú ý rằng trong quá trình lí luận, ta đã sử dụng phép biến đổi tương đương, vì vậy cả phần thuận và đảo được chứng minh song song. Giới hạn quỹ tích chính là phần đảo.

Bài toán này được xem là một bài toán cơ bản. Phần lớn các bài toán phức tạp đều được đưa về bài toán này qua một số phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 3: Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện AM^2-BM^2=k.

Hướng dẫn giải:

Ta biến đổi đẳng thức đã cho về dạng quen thuộc. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và hình chiếu của M trên đường thẳng AB. Ta có:

$$AM^2 - BM^2 = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\overrightarrow{BA} = k$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HI})\overrightarrow{BA} = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{HI}.\overline{BA} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}$$

Đẳng thức đó chứng tỏ H là điểm cố định và tập hợp M là đường thẳng vuông góc với AB tại H.

Bài toán này được xem là 1 tập hợp điểm cơ bản. Mọi bài toán phức tạp đều được đưa về bài toán đó qua các phép biển đổi tương đương.

Ví dụ 4: Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $AM^2+BM^2=k$.

Hướng dẫn giải:

Ta biến đổi đẳng thức đã cho về dạng quen thuộc. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có:

$$AM^2 + BM^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM})^2 + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow IM^2 = \frac{2k - AB^2}{4}$$

. Nếu $k > \frac{AB^2}{2}$ thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{\frac{2k - AB^2}{4}}$

. Nếu $k = \frac{AB^2}{2}$ thì tập hợp điểm M là điểm I.

. Nếu $k < \frac{AB^2}{2}$ thì tập hợp điểm M là tập ỉ

Bài toán này được xem là bài toán tập hợp điểm cơ bản. Mọi bài toán phức tạp đều được đưa về bài toán đó qua các phép biến đổi tương đương.

<u>*Hệ thống bài tập.</u>

Bài 1. Cho hai điểm phân biệt A, B và số dương $k \neq 1$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn: $\frac{MA}{MB} = k$

Bài 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các diểm M sao cho:

a) $2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$.

b) $(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC})=0$

c) $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(MC^2-MA^2-MB^2)$

d) Cho tam giác ABC đều cạnh a tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\overrightarrow{MA}=\frac{5a^2}{2}$

$MB^2+MC^2-2MA^2=O$

Bài 3. Cho hình vuông ABCD cạnh a. tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $MA^2+MB^2+MC^2-3MD^2=-\frac{4}{3}a^2$

b) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=3a^2$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD. Hai điểm M, N thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho:

$\frac{AM}{AB}=\frac{CN}{CD}$

Bài 5. Cho tứ giác ABCD Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|$

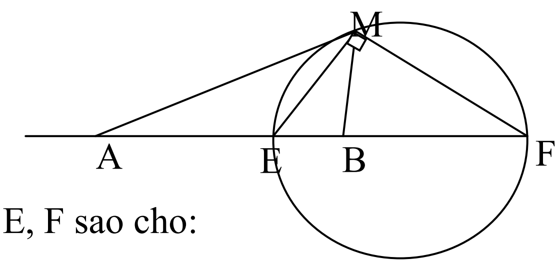
b) $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD})=0$

c) $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=k$ ($k>0$).

d) Gọi I, J là trung điểm của AB, CD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}^2$

Bài 6. Cho góc xOy và hai số dương a, b. Các điểm A, B thay đổi lần lượt trên Ox, Oy sao cho a.OA+b.OB=1. Chứng minh rằng trung điểm I của AB thuộc một đường thẳng cố định.



Hướng dẫn hoặc lời giải

Bài 1.

Lấy trên đường thẳng AB các điểm E, F sao cho:

$$\overrightarrow{EA} = -k\overrightarrow{EB}; \overrightarrow{FA} = k\overrightarrow{FB}.$$

Ta có: $\dfrac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ME} + k\overrightarrow{EB})(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA} - k\overrightarrow{MF} - k\overrightarrow{FB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{ME}.(1-k).\overrightarrow{MF} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-k^2)\overrightarrow{ME}\overrightarrow{MF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}\overrightarrow{MF} = 0 \quad \text{(Vì k>0, k} \neq 1\text{)}.$$

$$\Leftrightarrow ME \perp MF$$

- Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính EF. (đường tròn Apôlôniut).

Bài 2.

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, chọn điểm J thỏa mãn: $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$, J cố định.

Với mọi điểm M ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \\ \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MJ} \end{cases}$

Vậy $2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$

$$\Leftrightarrow 6\left|\overrightarrow{MG}\right| = 6\left|\overrightarrow{MJ}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right| = \left|\overrightarrow{MJ}\right|$$

Tập hợp các điểm M là đường trung trực của GJ.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chọn điểm K thỏa mãn: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$, K cố định.

Ta có: $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.6\overrightarrow{MK} = 0$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IK.

c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \dfrac{1}{2}(MC^2 - MA^2 - MB^2) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MC^2$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})^2=\overrightarrow{MC}^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|$$ (I là trung điểm của AB)

$$\Leftrightarrow \frac{MC}{MI}=2$$

Theo kết quả bài 1, M thuộc đường tròn Apôlôniut đường kính GF, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC, F là đỉnh hình bình hành ACBF.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp, G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có: $MB^2+MC^2-2MA^2=0$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2-2(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2=0$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OA})=0$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(3\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{OA})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AG}=0 \Leftrightarrow MO\perp AG$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua O, vuông góc với $\overrightarrow{AG}$.

e) Gọi O là tâm tam giác đều ABC, ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3.\overrightarrow{MO}$$
$$\Leftrightarrow MA^2+MB^2+MC^2+2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC})=9MO^2$$

Mặt khác: $MA^2+MB^2+MC^2=3MO^2+OA^2+OB^2+OC^2=3MO^2+a^2$

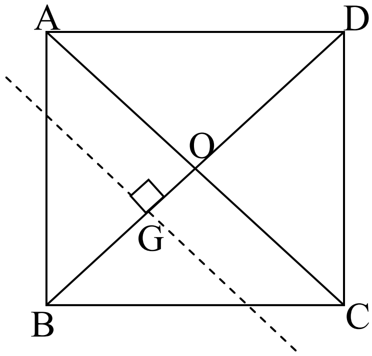
Suy ra: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=3MO^2-\frac{a^2}{2}$

Do đó đẳng thức đã cho tương đương với:

$$3.MO^2-\frac{a^2}{2}=\frac{5a^2}{2}\Leftrightarrow OM=a$$

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính a.

Bài 3.



a) cách 1.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có:

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

$$= 3MG^2 + \frac{1}{3}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$$
$$= 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + 2a^2 + a^2)$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = -\frac{4a^2}{3}$

$$\Leftrightarrow MD^2 - MG^2 = \frac{8}{9}a^2$$
$$\Leftrightarrow MD^2 - MG^2 = (\frac{2}{3}a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow MD^2 - MG^2 = DG^2$$

Vậy M thuộc đường thẳng vuông góc với BD tại G.

Cách 2:

Goi O là giao điểm của AC và BD.

Tacó:

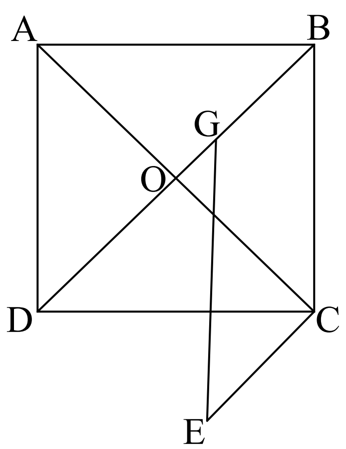
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 - 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2$$

$$= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OD})$$
$$= -8\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}$$

$$\Rightarrow -8\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD} = -\frac{4}{3}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD} = \frac{a^2}{6} \ (1)$$

Gọi H là hình chiếu của M lên BD, ta có: $\overline{HO}.\overline{OD} = \frac{a^2}{6} \Leftrightarrow \overline{HO} = \frac{a^2}{6.\overline{OD}}$

Vậy M thuộc đường thẳng vuông góc với BD tại H xác định bởi $\overline{HO} = \frac{a^2}{6.\overline{OD}}$.



b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có:

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}\overrightarrow{BC} = 3a^2$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\overrightarrow{BC} = a^2 (1)$$

Dựng hình bình hành GBCE.

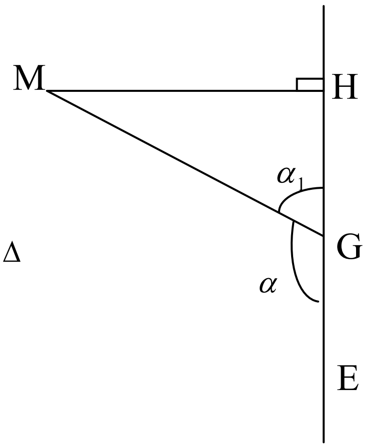
$$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GE} = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GE} = -a^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{GM}\right|\left|\overrightarrow{GE}\right|.\cos(\overrightarrow{GM},\overrightarrow{GE}) = -a^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{GM}\right|.\cos\alpha = -a$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{GM}\right|.\cos\alpha_1 = a$$

$$\Leftrightarrow GH = a$$



Suy ra H là điểm đối xứng với E qua G.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng Δ đi qua H và song song với AB.

Bài 4.

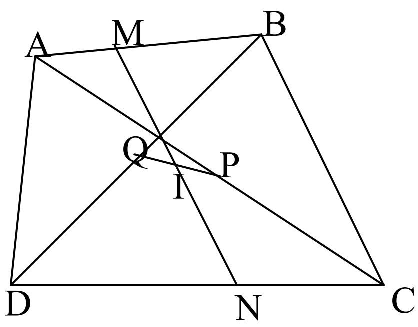
Theo giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}; (0 \le k \le 1)$$

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD.

Ta có: $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN}) = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}); (1)$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}); (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{PI} = k.\overrightarrow{PQ}$. Chứng tỏ P, I, Q thẳng hàng. Vì $(0 \le k \le 1)$ nên I thuộc đoạn PQ. Vậy tập hợp các trung điểm I của đoạn MN là đoạn PQ.

Bài 5.

c) Gọi I là trọng tâm của tứ giác ABCD nên: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$

Ta có: $$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 4MI^2 = k - (IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2)$$

-Nếu k > $IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{k-(IA^2+IB^2+IC^2+ID^2)}$$

-Nếu k = $IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ $\Leftrightarrow MI^2=0 \Leftrightarrow MI=0 \Leftrightarrow M\equiv I$. Tập hợp các điểm M là điểm I.

-Nếu k < $IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng (ỉ).

d) $$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}IJ^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})^2-(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})^2+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})^2-(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD})^2=2IJ^2$$
$$\Leftrightarrow 4MI^2-AB^2+4MJ^2-CD^2=2IJ^2$$
$$\Leftrightarrow 4MI^2+4MJ^2=AB^2+CD^2+2IJ^2.(2)$$

Goi O là trung điểm của IJ, ta có:

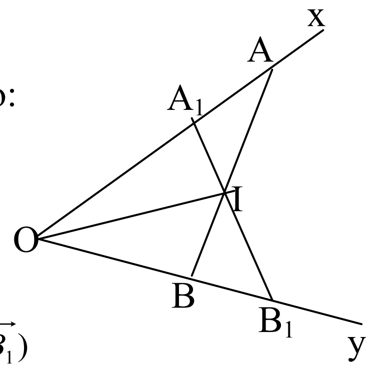
$$(2)\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ})^2+2(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ})^2=AB^2+CD^2+2IJ^2$$

$$\Leftrightarrow 8.MO^2=AB^2+CD^2 \Leftrightarrow MO=\sqrt{\frac{AB^2+CD^2}{8}}$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm O, bán kính:

$$R=\sqrt{\frac{AB^2+CD^2}{8}}$$

Bài 6.



Trên Ox, Oy lấy các điểm A_1, B_1 sao cho:

$$a.OA_1=b.OB_1=\frac{1}{2}$$

Vì I là trung điểm của AB nên:

$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\frac{OA}{OA_1}\overrightarrow{OA_1}+\frac{OB}{OB_1}\overrightarrow{OB_1})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{a.OA}{a.OA_1}\overrightarrow{OA_1}+\frac{b.OB}{b.OB_1}\overrightarrow{OB_1})$$

$$=a.OA.\overrightarrow{OA_1}+b.OB.\overrightarrow{OB_1}$$ (Vì $a.OA_1=b.OB_1=\frac{1}{2}$)

Vì a.OA+b.OB = 1 $\Rightarrow$ I, A_1, B_1 thẳng hàng.

Vậy I thuộc đường thẳng A_1B_1 cố định.

2.3.7 Ứng dụng của véctơ vào đại số

Có những bài toán mà việc giải bằng phương pháp thông thường gặp rất nhiều khó khăn, thậm chí có bài không thể tìm ra cách giải, nhưng lại rất dễ dàng và cho ta một lời giải ngắn gọn khi giải bằng PPVT. Từ đó, ta có thể thấy được những ứng dụng đa dạng của PPVT trong giải các bài toán mà đề ra không diễn đạt bằng "ngôn ngữ" véctơ. Để thấy được điều đó, chúng ta hãy xét một vài ví dụ sau đây.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$

Hướng dẫn giải:

Đây là bài toán "thuần túy" đại số, đề ra không hề có "bóng dáng" véctơ, tuy nhiên bài toán có thể giải bằng PPVT như sau:

Đặt $\vec{u} = (\sqrt{x+3}; \sqrt{6-x}), \vec{v} = (1;1)$

Suy ra $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{6-x})^2} = \sqrt{9} = 3; \left|\vec{v}\right| = \sqrt{(1+1)^2} = \sqrt{2}$.

Ta có: $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$ và $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = 3\sqrt{2}$

Vì $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} \le 3\sqrt{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $y_{max}=3\sqrt{2}$, khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}}{1} = \frac{\sqrt{6-x}}{1} \Leftrightarrow x+3 = 6-x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $\sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+2} \ge 2\sqrt{2}$, nghiệm đúng với mọi x.

Hướng dẫn giải:

Trước hết ta biến đổi các biểu thức dưới dấu căn bậc hai:

$$\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1};\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}.$$

Ta chọn $\vec{a}=(x+1;1);\vec{b}=(1-x;1);\vec{c}=(-2;-2)$

Rõ ràng $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\geq\left|\vec{c}\right|=2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+1}\geq 2\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi 2 véctơ $\vec{a};\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow x+1=1-x\Leftrightarrow x=0$

Ví dụ 3: Với mọi số thực x, y. Chứng minh rằng:

$$\left|(x+y)(1-xy)\right|\leq\frac{(1+x)^2(1+y)^2}{2}$$

Hướng dẫn giải:

Bất đẳng thức được biến đổi thành:

$$\frac{2\left|(x+y)(1-xy)\right|}{(1+x^2)(1+y^2)}\leq 1\Leftrightarrow\left|\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)+\left(\frac{2y}{1+y^2}\right)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right|\leq 1$$

Ta lập các véctơ $\vec{a}\left(\frac{2x}{1+x^2};\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{1-y^2}{1+y^2};\frac{2y}{1+y^2}\right)$

Và sử dụng bất đẳng thức $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$

Ví dụ 4: Cho tam giác nhọn ABC.Chứng minh rằng:

cos2A- cos2B+ cos2C < $\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải:

Bài toán lượng giác này cũng giải được bằng PPVT như sau:

Gọi O là tâm đường ngoại tiếp tam giác ABC, O’ là điểm đối xứng với O qua AC

Khi đó

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OO'}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO'}$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})^2=\overrightarrow{BO'}^2$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BO'}^2$$
$$\Leftrightarrow 3R^2+2R^2(\cos 2B-\cos 2A-\cos 2C)=\overrightarrow{BO'}^2>0$$
$$\Leftrightarrow 2R^2(\cos 2A-\cos 2B+\cos 2C)<3R^2$$
$$\Leftrightarrow \cos 2A-\cos 2B-\cos 2C<\frac{3}{2}$$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2+yz=0 \\ x^2+x+y+2yz=0 \\ 4(x+y)^2+4(y+z)^2=(x+1)^2+(2z+1)^2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$x^2+xy+y^2+yz=0$$
$$\Leftrightarrow x(x+y)+y(y+z)=0$$
$$x^2+x+y+2yz=0$$
$$\Leftrightarrow x(x+1)+y(2z+1)=0$$

Từ các vế trái của hai phương trình đầu trong hệ, ta có thể thiết lập các véctơ $\vec{a}(x;y);\vec{b}(x+y;y+z);\vec{c}(x+1;2z+1)$

Hệ phương trình ban đầu tương đương với các véctơ phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{b}=0 \\ \vec{a}.\vec{c}=0 \\ 2\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right| \end{cases}$$

-Ta xét trường hợp $\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow x=0, y=0$. Thay các kết quả đó vào phương trình thứ 3 trong hệ ta được $z=-\frac{1}{2}$. Tóm lại $x=y=0, z=-\frac{1}{2}$ là nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

- Trường hợp $\vec{a} \neq 0$.thì $\begin{cases} \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{c} \neq \vec{0} \end{cases}$

Vì $\vec{b},\vec{c}$ cùng vuông góc với $\vec{a}$, nên $\vec{b},\vec{c}$ cùng phương và theo điều kiện thứ 3 trong hệ điều kiện mà các véctơ phải thỏa mãn, ta có:

. $\vec{c} = 2\vec{b}$ hoặc $\vec{c} = -2\vec{b}$. Ta xét $\vec{c} = 2\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2x+2y \\ 2z+1 = 2y+2z \end{cases}$$

Hệ phương trình đó cho ta nghiệm x=0, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$ và thử lại kết quả vào hệ phương trình đầu thỏa mãn

. Ta xét $\vec{c} = -2\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -2x-2y \\ 2z+1 = -2y-2z \end{cases}$

Từ hệ phương trình này ta suy ra $x = -\frac{2y+1}{2}, z = \frac{2y+1}{2}$

Thay các biểu thức đó vào phương trình x(x+y)+y(y+z)=0 $\Rightarrow 10y^2 - 5y + 4 = 0$

Phương trình này vô nghiệm. Trường hợp thứ hai vô nghiệm.

2.4 Kết luận chương 2

Qua chương này chúng tôi đã xây dựng được một hệ thống bài tập điển hình từ đơn giản đến phức tạp và phân dạng được hầu hết các dạng bài tập cơ bản, thường gặp trong chương trình toán THPT.

Hệ thống bài tập trên cùng với những kỹ năng giải toán cần thiết như: Chuyển bài toán sang ngôn ngữ véc tơ, phân tích 1 véc tơ thành một tổ hợp véc tơ, kỹ năng biết cách ghép 1 số véctơ trong một tổ hợp véctơ…đã giúp học sinh dễ nhận dạng và tìm được cách giải cho mỗi bài toán cụ thể, giúp học sinh có hứng thú học tập môn toán, góp phần phát triển năng lực giải toán.

Sự phân dạng các bài tập trên đã tạo điều kiện cho học sinh tùy theo năng lực, trình độ của mình có thể chủ động, sáng tạo hơn khi học tập, nghiên cứu về chủ đề véctơ trong chương trình HH_{10}.

CHƯƠNG 3. THỬ NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1 Mục đích thử nghiệm sư phạm

Thử nghiệm sư phạm được tiến hành nhằm mục đích kiểm tra tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp sư phạm đưa ra, để dạy học sinh sử dụng PPVT trong việc giải các bài toán HH chương I, II ở lớp 10 THPT.

3.2 Nội dung thử nghiệm

* Tiến hành dạy 2 tiết chữa bài tập về chứng minh đẳng thức véctơ, ba điểm thẳng hàng trong chương véctơ SGK - HH_{10}- nâng cao, xuất bản năm 2006 của tác giả Văn Như Cương làm chủ biên.

* Bài dạy thử nghiệm là các tiết bài tập của bài "Tích của một véctơ với một số”

* Sau đây là giáo án cụ thể của hai tiết dạy này:

Tiết 8 BÀI TẬP VỀ TÍCH CỦA MỘT VÉCTƠ VỚI MỘT SỐ

(*Tiết 3 của bài:Tích của một véctơ với một số*)

1. Mục tiêu.

Về kiến thức: - Nắm được phương pháp chứng minh đẳng thức véctơ, vận dụng để giải một số bài toán khác.

Về kĩ năng

Thành thạo các kĩ năng:

-Chuyển bài toán sang ngôn ngữ véctơ.

-Phân tích 1 véctơ thành 1 tổ hợp véctơ.

-Biết cách ghép 1 số véctơ trong 1 tổ hợp véctơ.

-Biết khái quát hoá 1 số kết quả để vận dụng vào bài toán tổng quát hơn.

Về tư duy: - Hiểu được quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT.

- Biết quy lạ về quen.

Về thái độ: - Cẩn thận, chính xác.

-Biết được những ứng dụng của PPVT trong giải toán HH phẳng.

2. Chuẩn bị phương tiện dạy học.

Thực tiễn: HS đã học các tính chất của véctơ với 1 số, tính chất 3 điểm thẳng hàng, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, biết cách biểu thị 1 véctơ qua 2 véctơ không cùng phương.

Phương tiện: Chuẩn bị các bảng kết quả mỗi hoạt động.

Gợi ý PPDH: Cơ bản dùng PP gợi mở, vấn đáp thông qua các hoạt động điều khiển tư duy, đan xen hoạt động nhóm (chia lớp làm 3 nhóm).

3. Tiến trình bài học và các hoạt động.

a) Các tình huống học tập.

Hoạt động 1: Kiểm tra bài cũ.

Hoạt động 2: HS độc lập tiến hành tìm lời giải bài tập có sự hướng dẫn điều khiển của giáo viên.

Hoạt động3: Hoạt động theo từng nhóm, tiến hành vận dụng quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT để giải toán.

Hoạt động 4: HS độc lập tiến hành tìm lời giải bài tập theo quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT, có sự hướng dẫn điều khiển của giáo viên.

b) Tiến trình bài học.

1 Kiểm tra bài cũ.

Hoạt động 1

Bài1. Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi với điểm M bất kì, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Bài 2. Cho tam giác ABC và trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Hoạt động của HS	Hoạt động của giáo viên
*Nghe hiểu nhiệm vụ. *Trình bày kết quả. * Chỉnh sửa hoàn thiện (nếu có). *Quan sát 2 đẳng thức vừa chứng minh trên, và dự đoán để đưa ra câu trả lời.	*Giao nhiệm vụ cho HS, theo dõi hoạt động của HS. *Chính xác hóa kết quả của 2 HS được gọi lên bảng. *Đánh giá kết quả, chú ý các sai lầm thường gặp. * Cho HS nhận xét 2 đẳng thức véctơ vừa chứng minh trên, đặt vấn đề: "Nếu cho tứ ABCD, ta có đẳng thức véctơ nào?"

2. Bài mới

Hoạt động 2: HS độc lập tiến hành tìm lời giải bài tập có sự hướng dẫn điều khiển của giáo viên.

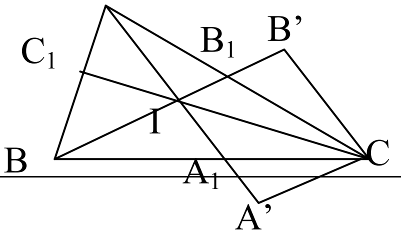
Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Luôn có 1 điểm G duy nhất sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{O}$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của 4 điểm A, B, C, D (hay trọng tâm của tứ giác ABCD). Chứng minh rằng $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (*) với M là điểm bất kì.

Hoạt động của HS	Hoạt động của giáo viên
*HS độc lập tiến hành chứng minh. *Thông báo cho giáo viên khi hoàn thành nhiệm vụ. *Trình bày kết quả. *-Ta có*	*Giới thiệu luôn có một điểm G duy nhất có tính chất như trên.(Việc chứng minh xem như bài tập về nhà). *Giao nhiệm vụ và theo dõi hoạt động của HS, hướng dẫn khi cần thiết. *Đánh giá kết quả hoàn thành nhiệm vụ của HS, sửa chữa

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=$ $=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$ $=4\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})$ $=4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{O}=4\overrightarrow{MG}$ *Suy ra* $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ *Quan sát và dự đoán để đưa ra câu trả lời. *Nghe và hiểu nhiệm vụ. *Suy nghĩ để rút ra quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT: *Bước 1: Chọn véctơ cơ sở.* *Bước 2: Chuyển bài toán sang ngôn ngữ véctơ.* *Bước 3: Trình bày lời giải.* *Bước 4: Kết luận đánh giá kết quả.* Bài 4: Cho hệ điểm hữu hạn $A_1, A_2, ...A_n$ Chứng minh rằng: a) Có duy nhất một điểm G sao cho $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+...+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$ Điểm G gọi là trọng tâm của hệ điểm đã cho b) với điểm M ta đều có: $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+...+\overrightarrow{MA_n}=n\overrightarrow{MG}$ *Độc lập giải bài 4b. *Quan sát và đưa ra câu trả lời: *Kết quả bài 1,bài 2,bài3 là trường hợp đặc biệt của bài 4 ứng với n=2, n = 3, n=4*	kịp thời các sai lầm. *Yêu cầu HS quan sát, tìm mối liên hệ của các đẳng thức vừa chứng minh ở bài 1. 2, 3.Đặt vấn đề: "Cho hệ điểm hữu hạn $A_1, A_2, ...A_n$, luôn có duy nhất một điểm G sao cho $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+...+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$, với điểm M bất kì, ta có đẳng thức véctơ nào?” *Hướng dẫn HS phân tích cách giải bài toán trên theo các bước sau: *Bước 1*:Tìm hiểu nội dung bài toán: tìm mối liên hệ giữa các véctơ trong đẳng thức phải chứng minh với giả thiết của bài toán. *Bước 2*: Xây dựng chương trình giải. *Bước 3*: Thực hiện chương trình giải. *Bước 4*: Kiểm tra và nghiên cứu lời giải. *Gợi ý để HS rút ra quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT. *Yêu cầu HS vận dụng quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT vào giải bài tập 4. (*Bài tập 4a xem như bài tập về nhà, cho HS là bài tập tương tự là bài 4b*) * Yêu cầu HS nhận xét kết quả bài 1, bài 2,bài 3, bài 4” -Lưu ý HS quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT.

Hoạt động 3: Hoạt động theo từng nhóm, tiến hành vận dụng quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT để giải toán.

Bài 5: Cho tam giác ABC với các cạnh AB= c, BC= a, CA= b Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $a.\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$

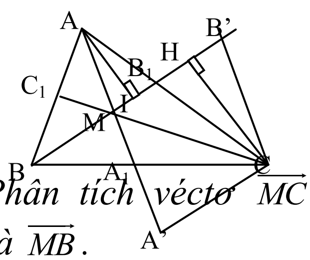
Hoạt động của HS	**Hoạt động của giáo viên**
*Đọc đầu bài, vận dụng quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT để nghiên cứu cách giải. *-Dựa vào gợi ý của giáo viên, HS suy nghĩ và trả lời dựa theo bước 1, bước 2 trong quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT:* *Bước 1: Phân tích véctơ $\overrightarrow{IC}$ theo véctơ $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}$ bằng cách dựng hình bình hành IA' CB'.* *Bước2: Ta có $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IA'}=\alpha.\overrightarrow{IB}+\beta.\overrightarrow{IA}$* *Điều phải chứng minh tương đương với việc xác định 2 số α,β* *Độc lập tiến hành giải toán. *Thông báo kết quả cho giáo viên khi đã hoàn thành nhiệm vụ. *Chính xác hóa kết quả (ghi lời giải của bài toán).  	*Giao nhiệm vụ, theo dõi hoạt động của HS, hướng dẫn khi cần thiết. **- Có thể hướng dẫn như sau:** *Cho HS nhận xét đẳng thức véctơ cần phải chứng minh.* *. Hỏi: "Có thể biểu diễn véctơ $\overrightarrow{IC}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}$ không ? (hoặc véctơ $\overrightarrow{IA}$ hoặc $\overrightarrow{IB}$ theo hai véctơ còn lại"* *.Hỏi: "Có nhận xét gì về phương của véctơ $\overrightarrow{IC}$ với phương của véctơ $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}$ "* *- Từ nhận xét trên, nêu vấn đề: "Có thể sử dụng phương pháp phân tích 1 véctơ theo 2 véctơ không cùng phương để giải ví dụ này được không?"* *Nhận và chính xác hóa kết quả của 1 hoặc 2 HS hoàn thành nhiệm vụ đầu tiên *Đánh giá kết quả hoàn thành nhiệm vụ của từng HS. Chú ý các sai lầm thường gặp.

Bước 3:Trình bày lời giải: Gọi giao điểm của các tia AI, BI, CI với BC, CA, AB lần lượt là A_1,B_1,C_1. Dựng hình bình hành IA'CB' ta có $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IA'} = \alpha.\overrightarrow{IB} + \beta.\overrightarrow{IA}$. Vì hai véctơ $\overrightarrow{IB'}$ và $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng nên $\alpha = -\frac{IB'}{IB} = -\frac{A_1C}{A_1B} = -\frac{b}{c}$ (tính chất phân giác) Tương tự $\beta = -\frac{IB'}{IA} = -\frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{a}{c}$ *Bước 4*. Kết luận: Vậy $a.\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}$ *Chú ý các cách giải khác.	(*rất nhiều học sinh mắc sai lầm sau: từ $\overrightarrow{IB'} = \alpha\overrightarrow{IB} \Rightarrow \alpha = \frac{IB'}{IB}$ vì không chú ý đến hướng của 2 véctơ $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IB'}$)* *Hướng dẫn HS tìm lời giải khác nếu có (xem như bài tập về nhà) *Lưu ý HS quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT.

Hoạt động 4: HS độc lập tiến hành tìm lời giải bài tập theo quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT, có sự hướng dẫn điều khiển của giáo viên.

Có thể tổng quát hoá bài 5, ta được bài toán sau:

Bài 6. Cho tam giác ABC. Gọi S_a, S_b, S_c theo thứ tự là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB với M là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng: $S_a.\overrightarrow{MA} + S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$

Hoạt động của HS	Hoạt động của giáo viên
*Nghe hiểu nhiệm vụ. -*Quan sát và trả lời câu hỏi của giáo viên.*  *Bước 1: Phân tích véctơ $\overrightarrow{MC}$ theo 2 véctơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$.*	*Giao nhiệm vụ cho HS, theo dõi hoạt động, hướng dẫn khi cần thiết. **- Có thể hướng dẫn như sau:** .Hỏi: "Về mặt hình thức có nhận xét gì về các đẳng thức véctơ ở bài 5 và bài 6?". .Từ đó xác định bước 1, bước 2 trong quy trình 4 bước giải bài tập

Bước 2: *Ta có* $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} = \alpha.\overrightarrow{MA} + \beta.\overrightarrow{MB}$. *Điều phải chứng minh tương đương với việc xác định 2số* α, β. *HS độc lập tiến hành chứng minh. *Thông báo cho giáo viên khi hoàn thành nhiệm vụ. *Trình bày kết quả. *Bước 3:Trình bày lời giải* Goị giao điểm của các tia AM, BM, CM với BC, CA, AB lần lượt là A_1,B_1,C_1. Dựng hình bình hành MA'CB' ta có $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} = \alpha.\overrightarrow{MA} + \beta.\overrightarrow{MB}$. Vì hai véctơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MA'}$ ngược hướng nên $\alpha = -\frac{MA'}{MA} = -\frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{CH}{AI} = -\frac{S_{MBC}}{S_{MAB}} = -\frac{S_a}{S_c}$ Tươngtự $\beta = -\frac{S_b}{S_c}$ .Vậy $\overrightarrow{MC} = -\frac{S_a}{S_c}.\overrightarrow{MA} - \frac{S_b}{S_c}\overrightarrow{MB}$ $\Rightarrow S_a.\overrightarrow{MA} + S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$ *Bước 4.* -Chú ý các cách giải khác. - *Nhận xét*: Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta được kết quả bài 5.	HH bằng PPVT. *Đánh giá kết quả hoàn thành nhiệm vụ của HS. Sửa chữa kịp thời các sai lầm. *Hướng dẫn HS tìm lời giải khác cho bài 6(xem như bài tập về nhà). *Yêu cầu HS nhận xét về kết quả bài toán khi M trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. *Gợi ý HS về nhà tìm tòi tiếp kết quả bài toán thay đổi như thế nào khi M trùng với trọng tâm tam giác ABC, khi tam giác ABC đều. * Lưu ý HS quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT.

Chú ý: Nếu không còn đủ thời gian để tiến hành hết hoạt động 4, giáo viên có hướng dẫn HS bài 6,và xem như bài tập về nhà.

3.Củng cố.

Câu hỏi 1: Để chứng minh các đẳng thức véctơ có chứa tích của véctơ với 1 số thì phải sử dụng các tính chất HH gì?

(- Sử dụng tính chất tích của véctơ với 1 số. Sử dụng các tính chất của trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, biết biểu thị 1 véctơ qua 2 véctơ không cùng phương…)

Câu hỏi 2: Cho tam giác ABC. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của 2 cạnh AB, AC.Hãy chọn cặp giá trị của m, n ở cột phải thích hợp với đẳng thức ở cột trái.

(a)	$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$	1	$m = -\frac{1}{2}$ và n=1
(b)	$\overrightarrow{PQ} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$	2	$m = \frac{1}{2}$ và n=0
(c)	$\overrightarrow{BQ} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$	3	m=-1 và $n = \frac{1}{2}$
(d)	$\overrightarrow{PC} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$	4	$m = -\frac{1}{2}$ và $n = \frac{1}{2}$

4.Bài tập về nhà: - Tìm cách giải khác cho bài 5, bài 6 trong bài học.

*Bài 23, 24, 25, 27 (SGK trang 24)

*Bài 16, 18, 24,25, 33, 38(SBT trang 8,9,11)

Tiết 9 BÀI TẬP VỀ TÍCH CỦA MỘT VÉCTƠ VỚI MỘT SỐ

(Tiết 4 của bài: Tích vô hướng của một véctơ với một số)

1. Mục tiêu

Về kiến thức: - Nắm được phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng, vận dụng để giải một số bài toán khác.

Về kĩ năng

Thành thạo các kĩ năng:

-Chuyển bài toán sang ngôn ngữ véctơ.

-Phân tích 1 véctơ thành 1 tổ hợp véctơ.

-Biết cách ghép 1 số véctơ trong 1 tổ hợp véctơ.

-Biết khái quát hoá 1 số kết quả để vận dụng vào bài toán tổng quát hơn.

Về tư duy: - Hiểu được quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT.

- Biết quy lạ về quen.

Về thái độ: - Cẩn thận, chính xác.

- Biết được những ứng dụng của PPVT trong giải toán HH phẳng.

2. Chuẩn bị phương tiện dạy học

2.1 Thực tiễn: HS đã học các tính chất của véctơ với 1 số, tính chất 3 điểm thẳng hàng, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, biết cách biểu thị 1 véctơ qua 2 véctơ không cùng phương.

2.2 Phương tiện: Chuẩn bị các bảng kết quả mỗi hoạt động.

2.3 Gợi ý PPDH: Cơ bản dùng PP gợi mở, vấn đáp thông qua các hoạt động điều khiển tư duy, đan xen hoạt động nhóm (chia lớp làm 3 nhóm).

3. Tiến trình bài học và các hoạt động

a) Các tình huống học tập.

Hoạt động 1: Kiểm tra bài cũ.

Hoạt động 2: HS độc lập tiến hành tìm lời giải bài tập theo quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT.

Hoạt động3: Rèn luyện kỹ năng chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

Hoạt động 4: Hoạt động theo từng nhóm, tiến hành vận dụng quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT để giải bài tập chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

b) Tiến trình bài học.

1. Kiểm tra bài cũ.

Hoạt động 1

-Câu 1: Phát biểu quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT?

-Câu 2:Phát biểu điều kiện cần và đủ để 3 điểm M, N, P thẳng hàng?

Giáo viên đặt vấn đề: Ngoài điều kiện cần và đủ để 3 điểm M, N, P thẳng hàng mà chúng ta đã biết thì còn điều kiện cần và đủ nào khác nữa không để 3 điểm M, N, P thẳng hàng?

2.Bài mới:

Hoạt động 2: HS độc lập tiến hành tìm lời giải bài tập theo quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT.

Bài 1.Cho 3 điểm ABC

a) Chứng minh rằng nếu có 1 điểm I và một số t nào đó sao cho $\overrightarrow{IA}=t\overrightarrow{IB}+(1-t)\overrightarrow{IC}$ thì với mọi điểm I' ta có:

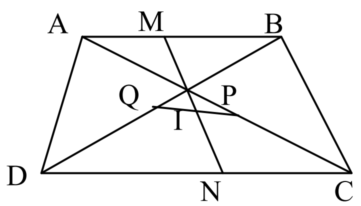
$\overrightarrow{I'A}=t\overrightarrow{I'B}+(1-t)\overrightarrow{I'C}$

b) Chứng tỏ rằng: $\overrightarrow{IA}=t\overrightarrow{IB}+(1-t)\overrightarrow{IC}$ là điều kiện cần và đủ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Hoạt động của HS	Hoạt động của giáo viên
*Độc lập tiến hành giải bài 1 theo quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT. *Thông báo cho giáo viên khi đã hoàn thành nhiệm vụ. *Trình bày kết quả. *Chỉnh sửa hoàn thiện (nếu có). *Ghi nhận kiến thức.	*Giao nhiệm vụ, theo dõi hoạt động của HS, hướng dẫn khi cần thiết. *Đánh giá kết quả hoạt động của HS, sửa chữa kịp thời các sai lầm. * Lưu ý HS quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT. - Lưu ý học sinh điều kiện cần và đủ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

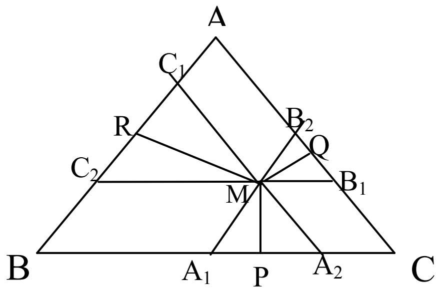
Hoạt động 3: Rèn luyện kỹ năng chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD.Hai điểm M,N thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{CD}$ gọi P,Q lần lượt là trung điểm của 2 đường chéo AC,BD, I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng 3 điểm P, I, Q thẳng hàng

Hoạt động của HS	Hoạt động của giáo viên
*Đọc đầu bài, vận dụng quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT để nghiên cứu cách giải. **Phân tích đề bài và đưa ra câu trả lời:* *- Bước 1: Chọn 2 vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ làm véctơ cơ sở* *- Bước 2: Điều phải chứng minh P,I,Q thẳng hàng tương đương với việc chỉ ra 2 véctơ $\overrightarrow{PI},\overrightarrow{PQ}$ cùng phương, nghĩa là chỉ ra số thực k sao cho $\overrightarrow{PI}=k\overrightarrow{PQ}$*  *Trình bày kết quả *Bước 3*: Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{CD}\left(O\le k\le 1\right)$ Ta có: $\overrightarrow{PI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN})=\frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})(1)$ $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CN})(2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow\overrightarrow{PI}=k\overrightarrow{PQ}$ hay P,I,Q thẳng hàng vì $\left(O\le k\le 1\right)$ nên I thuộc đoạn PQ. *Chỉnh sửa hoàn thiện (nếu có). *Bước 4*: *Nhận xét: $k=\frac{1}{2}$ ta được kết quả bài 28b-SGK.	* Giao nhiệm vụ, theo dõi hoạt động của HS, hướng dẫn khi cần thiết. **-Có thể hướng dẫn như sau**: *gợi ý để HS xác định bước1, bước 2 theo quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT.* *Đánh giá kết quả hoạt động của HS, sửa chữa kịp thời các sai lầm. *Hướng dẫn cách giải khác nếu có(việc giải theo cách khác coi như bài tập về nhà) *Yêu cầu HS có nhận xét gì về kết quả của bài toán khi k=$\frac{1}{2}$. * Lưu ý học sinh quy trình 4 bước giải bài toán hình học bằng PPVT. *Lưu ý HS phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

Hoạt động 4:: Hoạt động theo từng nhóm, tiến hành vận dụng quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT để giải bài tập chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác ABC đều, có tâm O, M là bất kỳ ở trong tam giác ABC và có hình chiếu xuống 3 cạnh BC, CA, AB tương ứng là P,Q,R. Gọi K là trọng tâm tam giác PQR. Chứng minh M,O,K thẳng hàng.

Hoạt động của HS	**Hoạt động của giáo viên**
*Đọc đầu bài, vận dụng quy trình 4 bước giải bài tập HH bằng PPVT để nghiên cứu cách giải. *Phân tích đề bài và đưa ra câu trả lời, sau đó xác định: - Bước1: Chọn véctơ $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MR}$ làm véctơ cơ sở* *- Bước 2: Điều phải chứng minh M,N,K thẳng hàng tương đương với việc chỉ ra 2 véctơ $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MK}$ cùng phương* *Độc lập tiến hành giải toán. *Thông báo kết quả cho Giáo viên khi đã hoàn thành nhiệm vụ. *Chính xác hóa kết quả(ghi lời giải của bài toán). 	*Giao nhiệm vụ và theo dõi hoạt động của HS, hướng dẫn khi cần thiết. **-Có thể hướng dẫn như sau:** *Cho học sinh nhận xét:* *+"Véctơ $\overrightarrow{MK},\overrightarrow{MO}$ có thể phân tích theo những véctơ nào ?"* *+ Nêu vấn đề: "Nếu từ M ta dựng các đường thẳng song song với 3 cạnh của tam giác ABC (như hình vẽ)thì ta được kết quả gì ? Có thể biểu diễn $\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}\right)$ theo các véctơ $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ được không?"* *Nhận và chính xác hóa kết quả của 1 hoặc 2 HS hoàn thành nhiệm vụ đầu tiên *Đánh giá kết quả hoàn thành nhiệm vụ của từng HS. Chú ý

- *Bước 3:* Qua M kẻ: $A_1B_2 // AB; A_1 \in BC; B_2 \in AC$ Qua M kẻ $B_1C_2 // BC; B_1 \in AC; C_2 \in AB$ Qua M kẻ $C_1A_2 // AC; C_1 \in AB; A_2 \in BC$ $\Rightarrow \Delta MB_1B_2, \Delta MC_1C_2, \Delta MA_1A_2$ đều $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}\right.$ $=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right]=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ Vậy $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ Suy ra: M, O, K thẳng hàng -Bước 4: Kết luận và đánh giá kết quả *<u>Bài 5.</u> Cho tam giác ABC, G là trọng tâm của tam giác ABC qua điểm M tuỳ ý trên mặt phẳng tam giác ABC dựng các đường thẳng song song với GA, GB, GC chúng tương ứng cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 Chứng minh M,G, G_1 thẳng hàng với G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$. Có nhận xét gì về điểm G_1.*	các sai lầm thường gặp. *Đưa ra lời giải (ngắn gọn nhất) cho cả lớp. * Hướng dẫn cách giải khác nếu có(việc giải theo cách khác coi như bài tập về nhà) * Lưu ý HS quy trình 4 bước giải bài toán hình học bằng PPVT. *Đặt vấn đề: *"Có thể tổng quát hoá bài toán trên ta được bài toán 5.* *Việc chứng minh bài 5 xem như bài tập về nhà, và yêu cầu HS có nhận xét gì về kết quả bài 5 khi tam giác ABC đều.*"

3.Củng cố.

Câu hỏi: Phương pháp chứng minh 3 điểm A, B, C (thỏa mãn 1 điều kiện xác định) thẳng hàng?

4.Hướng dẫn bài tập về nhà

-Các bài tập: * 28b, 28c (SGK trang 24).

*19a, 20a, 22 (SBT trang 8)

-Bài tập thêm: Bài 5 trong bài học.

3.3 Tổ chức thử nghiệm

3.3.1 Chọn lớp thử nghiệm

- Vì đối tượng thử nghiệm là học sinh lớp đại trà nên chúng tôi chọn hai lớp 10C3 là lớp thử nghiệm,10C4 là lớp đối chứng (Năm học 2006-2007) của trường THPT Bỉm Sơn - Tỉnh Thanh Hoá. Học lực của hai lớp này là tương đương, lớp 10C3 có 44 học sinh, lớp 10C4 có 48 học sinh, giáo viên dạy thử nghiệm là cô giáo Trịnh Thị Hà là giáo viên của trường PTTH Bỉm Sơn. Giáo viên dạy lớp thử nghiệm cũng là giáo viên dạy lớp đối chứng.

3.3.2 Tiến trình thử nghiệm:

- Dạy thử nghiệm được tiến hành vào giữa học kỳ I năm học 2006- 2007.
- Các tiết dạy thử nghiệm được tiến hành sau sau khi đã thống nhất mục đích, yêu cầu, nội dung giữa giáo viên dạy thử nghiệm. Sau mỗi tiết dạy thử nghiệm trên lớp, chúng tôi đã trao đổi và rút kinh nghiệm kịp thời với giáo viên giảng dạy nhằm chuẩn bị tốt hơn cho các tiết dạy sau.
- Ở lớp đối chứng, giáo viên giảng dạy như các giờ bình thường khác. Việc dạy thử nghiệm và đối chứng được tiến hành theo tiến trình giảng dạy của nhà trường.

3.4 Đánh giá kết quả thử nghiệm.

3.4.1 Đánh giá về nội dung.

- Việc thay thế phương pháp giảng bài tập, bổ sung các câu hỏi, bài tập vào giờ giảng đã làm cho giờ học trở nên phong phú, sinh động, phù hợp với đặc điểm nhận thức của học sinh. Các câu hỏi, các bài tập bổ sung đã phát huy và khai thác được tính tích cực học tập của học sinh, đồng thời làm cho học sinh nắm được kiến thức và kỹ năng về giải bài toán hình học phẳng bằng PPVT một cách chắc chắn, có khả năng vận dụng chúng vào việc giải các bài tập toán hình học phẳng, thông qua đó bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh.

3.4.2 Đánh giá về phương pháp dạy học khi thử nghiệm.

Thông qua dạy học thử nghiệm, dựa trên nội dung và phương pháp đã xây dựng trong giáo án, giáo viên đã dần dần làm quen với việc dạy học sinh giải bài toán hình học phẳng bằng PPVT, và tích luỹ được kinh nghiệm sử dụng, khai thác hệ thống câu hỏi, bài tập một cách hợp lý. Qua đó giáo viên dạy thử nghiệm cũng đã phát hiện được những hạn chế về kiến thức và kỹ năng giải bài toán HH bằng PPVT của học sinh. Từ đó, thông qua dạy giải các bài tập với cách đặt câu hỏi gợi mở thích hợp, giáoviên đã giúp học sinh tìm ra cách giải bài tập hình học phẳng bằng PPVT.

Tuy nhiên, việc giải bài toán HH phẳng bằng PPVT là một vấn đề mới đối với HS, mỗi giáo viên cần chú ý bố trí thời gian hợp lý cho từng dạng bài tập để đạt các yêu cầu giảng dạy trên lớp, đồng thời hướng dẫn cho học sinh cách làm bài tập ở nhà để rèn luyện kỹ năng.

3.4.3 Đánh giá về khả năng tiếp thu kiến thức của học sinh

Việc sử dụng lợp lý các phương pháp, đã lôi cuốn được sự chú ý, tìm tòi của học sinh, giờ dạy trở nên sinh động và hấp dẫn. HS rất hứng thú và nhanh chóng làm quen với việc giải bài toán HH phẳng bằng PPVT. Dưới sự hướng dẫn của giáo viên, nhiều học sinh đã giải được những bài tập cùng dạng với bài tập mẫu hoặc một số bài tập khác bằng PPVT và lời giải lại ngắn gọn sáng sủa hơn so với phương pháp tổng hợp. Với kiến thức và kỹ năng được hình thành như vậy, học sinh hoàn toàn có thể làm được những bài tập HH tổng hợp giải bằng PPVT.

Điều đó càng khích lệ học sinh phấn khởi, tự tin, chủ động tích cực học tập. Sau đợt thử nghiệm, học sinh thấy yêu thích môn toán hơn, có hứng thú giải toán HH bằng PPVT.

3.4.4 Kết quả kiểm tra

* Đề kiểm tra (thời gian 45 phút).

1.Mục tiêu.

1.Về kiến thức:

- Hiểu và vận dụng quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT vào giải bài tập HH.

- Hiểu và vận dụng các kỹ năng: chuyển bài toán sang ngôn ngữ véctơ, phân tích 1 véctơ thành 1 tổ hợp véctơ, biết cách ghép 1 số véctơ trong 1 tổ hợp véctơ vào giải các bài tập HH.

2. *Về kỹ năng*: Giải được các bài toán HH chứng minh đẳng thức véctơ, chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

3.Về tư duy và thái độ: biết quy lạ về quen, tích cực làm bài kiểm tra.

2. Nội dung.

Phần A. ***Trắc nghiệm khách quan.***(3,5 điểm)

<u>Câu 1</u>: Cho đoạn thẳng AB với trung điểm I. Xác định tính đúng-sai của các đẳng thức sau:

(a) $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$;   (b) $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$;

(c) $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;   (d) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{IB}$;

<u>Câu 2</u>: Cho tam giác vuông cân OAB có OA=OB=a. Độ dài của véctơ $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ bằng bao nhiêu? Hãy chọn kết quả đúng:

(a) a;   (b) a+a$\sqrt{2}$;   (c)a$\sqrt{5}$;   (d)2a$\sqrt{2}$;

<u>Câu3</u>: Cho tam giác ABC. Gọi A' là trung điểm cạnh BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Hãy điền vào ☐ chữ Đ nếu đẳng thức đúng, chữ S nếu đẳng thức sai.

(a) $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ ☐   (b) $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}$ ☐

(c) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$ ☐   (d) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$ ☐

<u>Câu 4:</u> Gọi M, N lần lượt là trung điểm của 2 đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD. Xác định tính đúng - sai của các mệnh đề sau:

(a) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$;

(b) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$;

(c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$;

(d) ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow M\equiv N$;

(e) ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$;

Phần B. Tự luận.(6,5 điểm).

<u>Câu 1</u> Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$

a) Chứng minh rằng I là trọng tâm tam giác BCD trong đó D là trung điểm cạnh AC.

b) Biểu thị véctơ $\overrightarrow{AI}$ theo 2 véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

<u>Câu 2.</u>Cho tam giác OAB, $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Gọi C, D, E là các điểm sao cho $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

a) Hãy biểu thị các véctơ $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CD},$ qua các véctơ $\vec{a},\vec{b}$

b) Chứng minh C, D, E thẳng hàng.

<u>Thang điểm:</u>

Phần A. Trắc nghiệm khách quan(3,5 điểm)

<table>
<tr><td>Câu</td><td colspan="4">1</td><td>2</td><td colspan="4">3</td><td colspan="5">4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Kết quả</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td rowspan="2">C</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td></tr>
<tr><td>Đ</td><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>Đ</td><td>S</td><td>Đ</td><td>Đ</td><td>Đ</td><td>Đ</td><td>Đ</td><td>Đ</td><td>S</td></tr>
</table>

Mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm.

Phần B. Tự luận(6,5 điểm).

Câu 1. (3,5 điểm). a) 2 điểm.

b) 1,5 điểm.

Câu 2 (3 điểm). a) 1,5 điểm. b) 1,5 điểm.

Kết quả bài kiểm tra:

Lớp	Sĩ số	Điểm <5		Điểm 5,6		Điểm 7,8		Điểm 9,10	
10C₃	44	0	0%	23	52,2%	14	31.8%	7	16%
10C₄	48	5	10.4%	28	58.3%	12	25%	3	6.3%

** Kết luận về bài kiểm tra:*

*Những nhận xét rút ra qua bài kiểm tra lớp thử nghiệm:

-Phần trắc nghiệm khách quan, hầu hết học sinh đều làm được.

-Phần tự luận:

.*Câu 1*:Phần lớn các em giải được bài toán này, tuy nhiên lập luận chưa rõ ràng, qua đó thấy được học sinh nắm được phương pháp giải nhưng chưa linh hoạt, dẫn đến kết quả chưa cao.

.*Câu 2*: Chỉ một số ít học sinh giải được bài này, nguyên nhân một phần là do bài toán khó hơn so với những bài khác, thời gian dành cho bài tập này còn hạn chế.

*Còn lớp đối chứng, do các ví dụ luyện tập chưa đa dạng nên khi gặp các tình huống mới học sinh còn lúng túng khi tìm lời giải cho các bài toán đòi hỏi tư duy, biến đổi phức tạp hơn nên kết quả chưa cao.

3.5 Kết luận chương 3.

Qua kết quả của việc dạy thử nghiệm trên có thể đưa ra kết luận sau:

-Việc đưa ra hệ thống bài tập HH phẳng giải bằng PPVT theo hướng rèn luyện kỹ năng giải bài tập toán cho học sinh trong các tiết dạy bài tập, kết hợp với các biện pháp sư phạm hợp lí để bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh là hoàn toàn có thể thực hiện được.

-Khi dạy học giải bài tập HH phẳng bằng PPVT, việc phối hợp giữa vận dụng quy trình bốn bước giải toán HH phẳng bằng PPVT với các biện pháp sư phạm phù hợp làm cho giờ dạy giải bài tập toán trở nên sinh động hơn gây được hứng thú học tập cho học sinh, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán trong trường phổ thông. Tuy nhiên để có một tiết dạy có chất lượng theo các nội dung đã đưa ra trong luận văn và gây được hứng thú học tập cho học sinh đòi hỏi người giáo viên phải có một sự đầu tư thỏa đáng.

KẾT LUẬN

Qua những vấn đề trình bày trong luận văn có thể rút ra một số kết luận sau:

1.Trong các nhiệm vụ của môn toán ở trường THPT, cùng với việc truyền thụ tri thức, rèn luyện kỹ năng là một nhiệm vụ quan trọng, là cơ sở để thực hiện các nhiệm vụ khác. Để rèn luyện kỹ năng giải toán, góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh cần đưa ra một hệ thống bài tập đa dạng, hợp lí, được sắp xếp từ dễ đến khó nhằm giúp học sinh củng cố kiến thức, rèn luyện kỹ năng phát triển tư duy và biết áp dụng toán học vào thực tiễn.

2.Luận văn đã hướng dẫn cho học sinh phương pháp tìm lời giải của bài toán theo bốn bước trong lược đồ của Pôlya.

3.Luận văn đã đề xuất được một số biện pháp sư phạm phù hợp, thông qua hệ thống bài tập nhằm rèn luyện kỹ năng giải bài tập HH bằng PPVT với nội dung phong phú đã đề cập được tới hầu hết các tình huống điển hình mà học sinh hay gặp khi giải toán HH phẳng bằng PPVT. Đáp ứng được nhu cầu tự học, tự nghiên cứu của học sinh, điều đó có tác dụng rèn luyện năng lực giải toán cho học sinh THPT.

4.Kết quả thu được qua thử nghiệm đã chứng tỏ cho tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp mà luận văn đề cập tới. Luận văn đã góp được phần nào trong việc nâng cao chất lượng dạy và học ở trường THPT.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1.Bùi Mai Anh (2002), *Rèn luyện năng lực giải toán của học sinh THPT*, Luận Văn thạc sĩ khoa học giáo dục, Đại Học Sư Phạm I Hà Nội, Hà Nội.

2.Nguyễn Phương Anh, Hoàng Xuân Vinh (2006), *Luyện tập trắc nghiệm Hình Học 10*, Nxb Giáo Dục.

3.Phan Văn Các (1992), *Từ điển Hán-Việt*, Nxb Giáo Dục.

4.Nguyến Vĩnh Cận-Lê Thống Nhất-Phan Thanh Quang (1997), *Sai lầm phổ biến khi giải toán*, Nxb Giáo Dục.

5.Hoàng Chúng (1997), *Phương pháp dạy học môn toán ở trường THP*, Nxb Giáo Dục.

6.Hà Văn Chương (2006), *Tuyển chọn 400 bài toán Hình Học 10*, Nxb Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

7.Văn Như Cương (Chủ biên)-Phạm Vũ Khuê-Trần Hữu Nam (2006), *Bài tập Hình Học 10 nâng cao*, Nxb Giáo Dục.

8.Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình (2006), *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Hình Học 10*, Nxb Giáo Dục.

9.Hàn Liên Hải, Phan Huy Khải, Đào Ngọc Nam, Lê Tất Tôn, Đặng Quan Viễn (1996), *Toán bồi dưỡng học sinh Hình Học 10*, Nxb Hà Nội.

10.Trần Văn Hạo (Chủ biên), Nguyễn Mộng Hy, Trần Đức Huyên, Lê Văn Tiến, Lê Thị Thiên Hương (2006), *Tài liệu chủ đề nâng cao Toán 10*, Nxb Giáo Dục.

11.Nguyễn Thái Hòe (2004), *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán*, Nxb Giáo Dục.

12.Nguyễn Bá Kim (2004), *Phương Pháp dạy học môn Toán*, Nxb Đại Học Sư Phạm, Hà Nội.

13.Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy (1992), *Phương Pháp dạy học môn Toán (phần I),* Nxb Giáo Dục.

14.Nguyễn Bá Kim, Đinh Nho Chương, Nguyễn Mạnh Cảng, Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Thường (1994), *Phương Pháp dạy học môn Toán (phần II)-Dạy học những nội dung cơ bản*, Nxb Giáo Dục.

15.Nguyễn Văn Lộc (2007), *Một số ý kiến về định hướng viết tài liệu dạy học chủ đề tự chọn môn toán cho học sinh THPT phân ban*, Tạp chí giáo dục số 154.

16.Bùi Văn Nghị (2007), *Các bài giảng chuyên đề: Chuyển tiếp môn toán từ phổ thông lên đại học*, Khoa toán tin-Đại Học Sư Phạm Hà Nội, Hà Nội.

17.Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Vũ Khuê, Bùi Văn Nghị (2006), *Sách giáo khoa Hình Học 10 nâng cao*, Nxb Giáo Dục.

18.Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Vũ Khuê, Bùi Văn Nghị (2006), *Sách giáo viên Hình Học 10 nâng cao*, Nxb Giáo Dục.

19.Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương, Nguyễn Huy Đoan, Phạm Vũ Khuê, Trần Văn Vuông, Nguuyễn Thế Thạch, Phạm Đức Quang (2006), "Chương trình và sách giáo khoa toán 10 nâng cao", *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên*, Nxb Giáo Dục.

20.Nguyễn Cảnh Toàn (1997), *Phương pháp duy vật biện chứng với việc học, dạy, nghiên cứu toán học-Tập 1*, Nxb Giáo Dục.

21.Nguyễn Cảnh Toàn (1997), *Tập cho học sinh giỏi làm quen với nghiên cứu toán học*, Nxb Giáo Dục.

22.Nguyễn Thị Hương Trang (2002), *Rèn luyện năng lực giải toán theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề một cách sáng tạo cho học sinh khá giỏi trường THPT*, luận án tiến sĩ giáo dục học, Viện khoa học giáo dục, Hà nội.

23.Đỗ Đức Thái, Đỗ Thị Hồng Anh (2006), *Bồi dưỡng toán 10-Tập 2*, Nxb Đại Học Sư Phạm, Hà Nội.

24.G Polya (1977), Giải một bài toán như thế nào, Nxb Giáo Dục.

25.G Polya (1976), Sáng tạo toán học, Nxb Giáo Dục.