Trần Thành Minh – Phan Lưu Biên - Trần Quang Nghĩa

HÌNH HỌC 10
Chương 2.

Tích Vô Hướng Và Ứng Dụng

§1.Tích vô hướng của hai vectơ

A .Tóm tắt giáo khoa :

1 . Góc giữa hai vectơ :

a) Góc hình học : Góc hình học là hình tạo bởi hai tia có chung gốc .Số đo a (tính bằng độ) của một góc hình học thỏa : $0^o \le a \le 180^o$

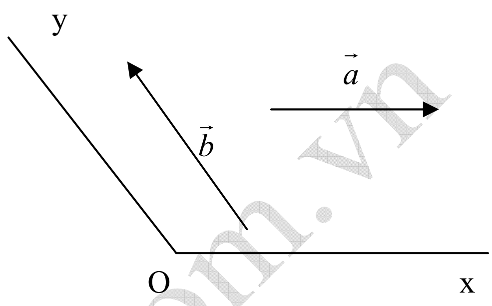
- Nếu $0^o \le a \le 90^o$ và a không phải là góc đặc biệt ($0^o;30^o;45^o;60^o;90^o$) càc giá trị lượng giác của a được tính bằng máy tính bỏ túi
- Nếu $90^o < a \le 180^o$, ta dùng góc bù để tính giá trị lượng giác của a :

$\sin a = \sin(180^o - a)$

$\cos a = -\cos(180^o - a)$

$\tan a = -\tan(180^o - a)$

$\cot a = -\cot(180^o - a)$



b) Góc giữa hai vectơ : Cho 2 vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ $(\neq \vec{0})$;

Vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ Góc AOB được gọi là góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$

Ký hiệu : $(\vec{a},\vec{b})$

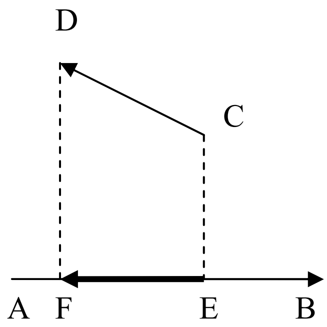
2 . Tích vô hướng của hai vectơ :

a) Định nghĩa : Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ký hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ là một số xác định bởi :

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})}$$

b) Tính chất :

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$
$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$
$$(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$$



Ta cũng có các kết qủa sau :

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Chú ý : Sử dụng các tính chất ta sẽ có các hệ thức :

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$$
$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

c) Công thức hình chiếu : Cho hai vectơ bất kỳ , $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$. Gọi E , F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C , D xuống đường thẳng AB . Ta có công thức :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}}$$

d) Công thức về tọa độ :

Cho các vectơ : $\vec{a} = (a_1,a_2)$; $\vec{b} = (b_1,b_2)$. Ta có các công thức :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$
$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$
$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

3 . Áp dụng :

Bài toán 1 : Tìm tập hợp điểm M thỏa : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ (1) (A , B cố định ; k là hằng số)

Gọi I là trung điểm của AB , ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k$$
$$\Leftrightarrow IM^2 = k + IA^2$$

- $k + IA^2 > 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn (I , $\sqrt{k + IA^2}$)
- $k + IA^2 = 0$: Tập hợp các điểm M là : $\{I\}$
- $k + IA^2 < 0$: Tập hợp các điểm M là tập rỗng

Bài toán 2 : Phương tích của một điểm đối với một đường tròn .

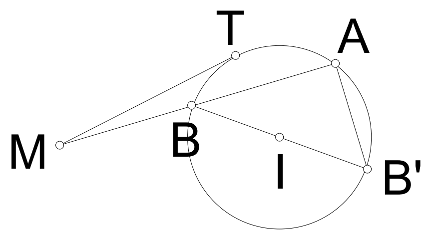
Cho đường tròn tâm I , bán kính R và một điểm M . Một đường thẳng bất kỳ qua M cắt đường tròn tại A và B . Biểu thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ được gọi là ***phương tích của điểm M đối với đường tròn (I)*** .

Ta có :

$$P^M/(I) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB'} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB'})$$
$$= MI^2 - IB^2 \ (do\ \overrightarrow{IB'} = -\overrightarrow{IB})$$
$$= MI^2 - R^2$$

Chú ý : Do biểu thức trên , ta cũng có : $P^M/(I) = MT^2$

(MT là tiếp tuyến vẽ từ M đến đường tròn (I))



B . Giải toán :

Dạng toán 1 : Sử dụng máy tính fx-500MS để tính giá trị lượng giác của một góc

Ví dụ 1 : Tính các giá trị sau

$a)\sin 65^o43'36"; b)\tan(62^o25'16"); c)\ \cot(42^o12')$

Giải :

Ấn phím MODE nhiều lần để màn hình hiện lên dòng chữ

Deg	Rad	Gra
1	2	

Ấn phím 1 để chọn đơn vị đo góc là độ

a) Ấn liên tiếp các phím : sin 6 5 o’’’ 4 3 o’’’ 3 6 o’’’ = 0,9115

b) Ấn liên tiếp các phím :tan 6 2 o’’’ 2 5 o’’’ 1 6 o’’’ = 1,9145

c) Ấn liên tiếp các phím : 1 ÷ tan 4 2 o’’’ 1 2 o’’’ = 1,1028

Vậy $\sin 65^o43'36" = 0{,}9115; \tan(62^o25'16") = 1{,}9145; \cot(42^o12') = 1{,}1028$

Ví dụ 2 : Tính x biết : a) sinx = 0,3502 b) tanx = 2 c) cotx = 2,619

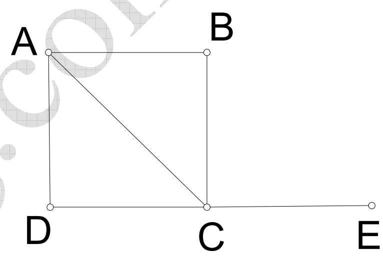
Giải :

a) Ấn liên tiếp các phím : shift sin 0 . 3 5 0 2 = o’” màn hình hiện lên $20^o29'58"$
Vậy : x = $20^o29'58"$
b) Ấn liên tiếp các phím : shift tan 2 = o’” màn hình hiện lên
$63^o26'5"$ Vậy : x = $63^o26'5"$
c) Ấn liên tiếp các phím :shift tan (1 ÷ 2 . 6 1 9) = o’” màn hình hiện lên
$20^o53'53"$ Vậy : x = $20^o53'53"$

Dạng toán 2 : Tính giá trị lượng giác của góc giữa 2 vectơ

Ví dụ 1 : Cho hình vuông ABCD ; tính giá trị lượng giác của góc giữa các cặp vectơ sau :
$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC})$. $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{DC})$

Giải :
Ta có :
$:\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD} \Rightarrow (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=DAC=45^o$



Do đó : $\sin(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})=\sin 45^o=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})=\cos 45^o=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})=\tan 45^o=1=\cot(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})$

Tương tự , vẽ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}$; $\alpha=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE})=135^o$ và ta có :

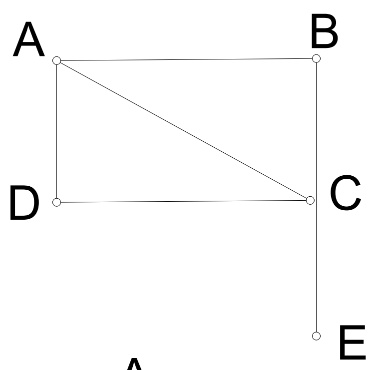
$\sin\alpha=\sin 135^o=\sin 45^o=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\cos\alpha=\cos 135^o=-\cos 45^o=\dfrac{-\sqrt{2}}{2};$ (vì 135^o ; 45^o bù nhau)

$\tan\alpha=\tan 135^o=-\tan 45^o=-1;\ \cot\alpha=-1$

Ví dụ 2 : Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 4cm ; AD =3cm . Tính các góc :
$a=(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$; $b=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC})$

Giải :
Ta có : a = góc CAD Suy ra :

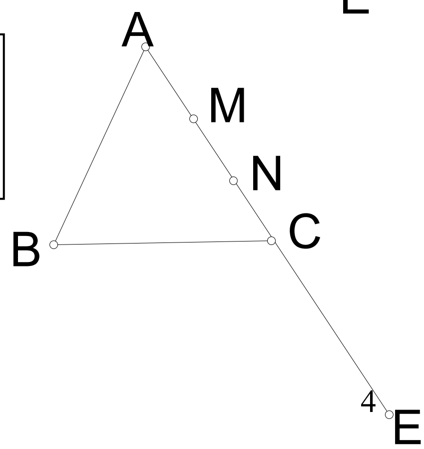
$$\tan a=\frac{CD}{AD}=\frac{4}{3}=1,333 \Rightarrow a=53^o7'$$



$b=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE})$; $(\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC})$
Suy ra b = gócACE .Mà gócACE và góc CAD bù nhau
Nên b = $180^o-53^o7'=126^o53'$

Dạng toán 3 : Tinh tích vô hướng

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 3a
. M , N là hai điểm thuộc cạnh AC sao cho AM = MN = NC
Tính những tích vô hướng sau :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$



Giải :
Ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\cos 60^o=3a.3a.\frac{1}{2}=\frac{9a^2}{2}$$

Vẽ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$; $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}) = BCE = 120^o$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = AC.CB\cos 120^o = 3a.3a.(\frac{-1}{2}) = \frac{-9a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB})$$
$$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}^2$$
$$= AM.AN\cos 0^o - AB.AM\cos 60^o - AB.AN\cos 60^o + AB^2$$
$$= a.2a.1 - 3a.a(\frac{1}{2}) - 3a.2a(\frac{1}{2}) + 3a.3a$$
$$= \frac{13}{2}a^2$$

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC , trọng tâm G ; M là một điểm trên đường thẳng (d) qua G và vuông góc với cạnh BC . Chứng minh rằng $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{BC} = 0$

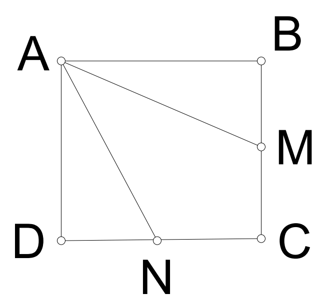
Giải :

Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC} = 0$ vì $\overrightarrow{MG} \perp \overrightarrow{BC}$

Ví dụ 3 : Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a ; M , N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính các tích vô hướng sau : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AN}$

Giải : Ta có :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}$$
$$= a^2 + 0 = a^2 \quad (\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM} = 0)$$
$$\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN})$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}$$
$$= 0 + AB.DN\cos 0^o + BM.AD\cos 0^o + 0$$
$$= a.\frac{a}{2}.1 + \frac{a}{2}.a.1 = a^2 (\,AB \perp AD; BM \perp DN)$$



Dạng toán 4 : Sử dụng định lý chiếu

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC vuông tại A và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = 4$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 9$. Tính ba cạnh của tam giác

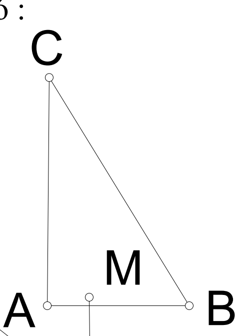
Giải :

Ta có : C , B có hình chiếu xuống đường thẳng AB lần lượt là A , B .Do đó :

$4 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 \Rightarrow AB = 2$. Tương tự :

$9 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = AC^2 \Rightarrow AC = 3$

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

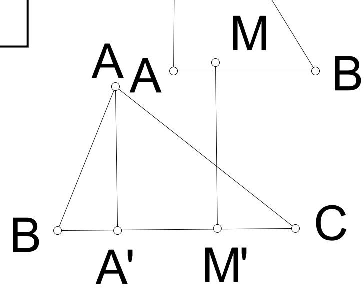


Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa hệ thức:
$\overrightarrow{BC}.(2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC}) = 0$ (1)

Giải :

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{BC^2}{2}$$

Gọi A’ , M’ lần lượt là hình chiếu của A , M xuống đường



thẳng BC , theo định lý hình chiếu , ta có : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{BC}$ Do đó : $\overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{BC} = \frac{BC^2}{2} > 0$

Suy ra 2 vectơ $\overrightarrow{A'M'}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng

Do đó ; $\overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{BC} = \frac{BC^2}{2} \Leftrightarrow A'M'.BC = \frac{BC^2}{2} \Leftrightarrow A'M' = \frac{BC}{2}$

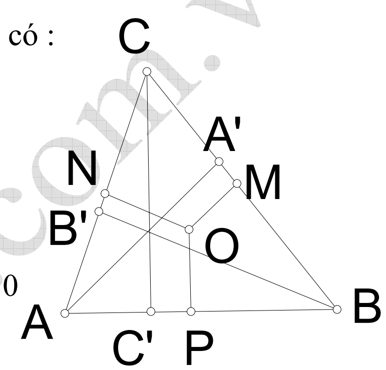
Vậy điểm M’ cố định (vì A’ cố định và BC khôngđổi)

Do đó : Tập hợp các điểm M là đường thẳng (d) vuông góc với BC tại M’

Ví dụ 3 : Cho tam giác ABC có ba đường cao là : AA’ , BB’ ,CC’. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB . Chứng minh : $\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'N}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C'P}.\overrightarrow{AB} = 0$

Giải :

Gọi O là tâm đường tròn ngọai tiếp và H là trực tâm của tam giác , ta có :



A’ , B’ , C’ lần lượt là hình chiếu của H xuống BC , CA , AB .

M , N , P lần lượt là hình chiếu của O xuống BC , CA , AB

Do đó : $\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HO}.\overrightarrow{BC}$ (theo định lý hình chiếu)

Tương tự :

$$\overrightarrow{B'N}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HO}.\overrightarrow{CA} : \overrightarrow{C'P}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HO}.\overrightarrow{AB}$$

Do đó : $\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'N}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C'P}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HO}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HO}.\overrightarrow{O} = 0$

Dạng toán 5 : Chứng minh một hệ thức giữa các độ dài

Ta thường sử dụng các tính chất của tích vô hướng và tính chất $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC có góc BAC = 120^o ; AB =3 ; AC = 6 Tính cạnh BC

Giải : Ta có

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 36 - 2.6.3\cos 120^o + 9$$
$$= 36 + 18 + 9 = 63$$
$$\Rightarrow BC = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC trọng tâm G ; BC = a ; CA = b ; AB = c

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

b) Tính AG theo ba cạnh a , b , c

Giải :

Ta có : $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

Gọi M là trung điểm của BC , ta có :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$
$$AG^2 = \overrightarrow{AG}^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{1}{9}(b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

Vậy : $AG = \frac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

Ví dụ 3 : Cho hình vuông ABCD tâm là O , cạnh bằng a .Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MO^2 + 2a^2$

Giải :

Ta có :

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = MO^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = MO^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}$$

$$MD^2 = \overrightarrow{MD}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = MO^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MO^2 + 4OA^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= 4MO^2 + 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + 0$$

$$= 4MO^2 + 2a^2$$

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{O} \ ; \ OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2})$$

Dạng toán 6 : **Chứng minh 2 vectơ vuông góc (hay 2 đường thẳng vuông góc)**

Ví dụ 1 : Cho $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 4$; $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{6}$ Chứng minh rằng hai vectơ $(\vec{a} + \vec{b})$; $(\vec{a} - 2\vec{b})$ vuông góc

Giải : Ta có

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - 2\vec{b}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - 2\vec{b}^2 = 36 - \vec{a}.\vec{b} - 2.16$$

$$= 36 - |\vec{a}||\vec{b}|.\frac{1}{6} - 32 = 36 - 6.4.\frac{1}{6} - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$$

Ví dụ 2 : Cho hình thang vuông ABCD có 2 đáy là AD = 2a ; BC = 4a ; đường cao AB = $2a\sqrt{2}$. Chứng minh rằng hai đường chéo AC và BD thì vuông góc với nhau

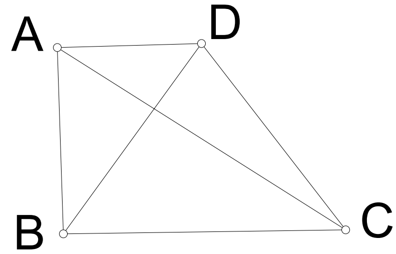
Giải : Ta có

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$$

$$= AB.BA\cos 180^o + 0 + 0 + BC.AD\cos 0^o$$

$$= 2a\sqrt{2}.2a\sqrt{2}(-1) + 4a.2a.1 = -8a^2 + 8a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$



Vậy hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau

Dạng toán 7 : Sử dụng công thức về tọa độ

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC với A(10 , 5) ; B(3 , 2) ; C(6 , -5) .Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại B .

Giải :

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (3-10, 2-5) = (-7,-3)$; $\overrightarrow{BC} = (6-3, -5-2) = (-3,-7)$

Suy ra : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = (-7).(3) + (-3).(-7) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Vậy tam giác ABC vuông tại B

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC có A(3 , 1) ; B(-1 , -1) ; C(6 , 0)
a) Tính góc A của tam giác ABC .
*b) Tính tọa độ giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC

Giải :

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-4,-2)$; $\overrightarrow{AC} = (3,-1)$

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-4.3 + (-2).(-1)}{\sqrt{16+4}.\sqrt{9+1}} = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Vậy góc A bằng 135^o

*b) Gọi M là giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC , ta có : M (x , y) ; $\overrightarrow{MA} = (3-x, 1-y); \overrightarrow{MB} = (-1-x, -1-y); \overrightarrow{MC} = (6-x, -y); \overrightarrow{MO} = (-x, -y)$ và

$$\begin{cases} MA \perp MB \\ MC \perp MO \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \\ \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MO} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(-1-x) + (1-y)(-1-y) = 0 \\ (6-x)(-x) + (-y)(-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \, (1) \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 \, [(1)-(2)] \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + y^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy có hai giao điểm M : $M_1(1, -\sqrt{5})$; $M_2(1, \sqrt{5})$

Ví dụ 3 : Cho tam giác ABC có A(5 , 3) ; B(2 , - 1) ; C(-1 , 5)
a) Tính tọa độ trực tâm H của tam giác
b) Tính tọa độ chân đường cao vẽ từ A

Giải :

a) Gọi H(x , y) là tọa độ trực tâm , ta có :
$\overrightarrow{AH} = (x-5, y-3); \overrightarrow{BC} = (-3, 6); \overrightarrow{BH} = (x-2, y+1); \overrightarrow{AC} = (-6, 2)$

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(-3) + (y-3)(6) = 0 \\ (x-2)(-6) + (y+1)(2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ trực tâm H là : H(3 , 2)

b) Gọi A'(x , y) là tọa độ chân đường cao vẽ từ A , ta có :

$\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x - 2y = -1$ (1) (tương tự câu a)

$\overrightarrow{BA'} = (x-2, y+1)$; $\overrightarrow{BA'}$ cùng phương $\overrightarrow{BC} = (-3, 6)$.

Suy ra : 6(x – 2) + 3(y + 1) = 0 (2) .Giải (1) và (2) ta có : x = y = 1
Vậy tọa độ chân đường cao A' vẽ từ A là : A'(1 , 1)

Dạng toán 8 : Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 1 :Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa : $a)\ (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \ (1)$
$b)\ MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \quad (2)$

Giải :

a) Ta có : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$; $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BC}$ (I là trung điểm của AB)

(1) $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow MI\perp BC$: Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng (d) qua I và vuông góc với BC

b) $(2)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0\Leftrightarrow MA\perp MI$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI (I là trung điểm của AB)

***Ví dụ 2 :** Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a . Tìm tập hợp các điểm M thỏa :

$a)\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=-\dfrac{a^2}{4}$

$b)\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=a^2$

$c)(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=a^2$

Giải :

Gọi O là tâm hình vuông (cũng là trung điểm AC) . Ta có :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=-\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})=-\frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MO^2-OA^2=-\frac{a^2}{4}(do\ \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow OM^2=OA^2-\frac{a^2}{4}=\frac{2a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow OM=\frac{a}{2}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính bằng $\dfrac{a}{2}$

Tương tự , ta có :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=a^2\Leftrightarrow MO^2-OA^2+MO^2-OB^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2=a^2\Leftrightarrow OM=a\ (do\ OA=OB=\frac{a\sqrt{2}}{2})$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính bằng a

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$; $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$ (G là trọng tâm tam giác ABC) . Do đó :

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=a^2\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MO}=\frac{a^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow MJ^2-JO^2=\frac{a^2}{6}\Leftrightarrow JM^2=\frac{a^2}{6}+(\frac{1}{2}GO)^2=\frac{a^2}{6}+(\frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{2}}{2})^2=\frac{26a^2}{144}$$

$$\Leftrightarrow JM=\frac{a\sqrt{26}}{12}$$

(J là trung điểm của OG ; JO = $\dfrac{1}{2}GO$; $GO=\dfrac{1}{3}BO=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$)

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính bằng $\dfrac{a\sqrt{26}}{12}$

Dạng toán 9 : Tính phương tích . Tính đoạn tiếp tuyến .

Ví dụ 1 : Cho 4 điểm A(- 2 , 1) ; B(4 , 7) ; M(0 , 2) ; N(- 3 , - 5)
Tính phương tích của điểm M , N đối với đường tròn đường kính AB

Giải :

Ta có : tọa độ tâm I của đường tròn (cũng là trung điểm của AB) :

$$I\left(\frac{-2+4}{2},\frac{1+7}{2}\right) \Rightarrow I(1,4)$$

Ta cũng có :

$$\overrightarrow{IA} = (-2-1, 1-4) = (-3,-3) \Rightarrow R^2 = IA^2 = 9+9 = 18$$

$$\overrightarrow{IM} = (0-1, 2-4) = (-1,-2) \Rightarrow P^M/(I) = IM^2 - R^2 = (1+4) - 18 = -13$$

$$\overrightarrow{IN} = (-3-1, -5-4) = (-4,-9) \Rightarrow P^N/(I) = IN^2 - R^2 = (16+81) - 18 = 79$$

Ví dụ 2 : Cho 4 điểm A(- 2 , - 1) ; B(- 1 , 4) ; C(4 , 3) ; M(5 ,- 2). Chứng minh rằng điểm M ở ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tính đoạn tiếp tuyến MT vẽ từ M đến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (T là tiếp điểm)

Giải :

Gọi I (x , y) là tâm đường tròn (ABC) ,ta có :

$$\overrightarrow{IA} = (x+2, y+1) \; ; \; \overrightarrow{IB} = (x+1, y-4) \; ; \; \overrightarrow{IC} = (x-4, y-3)$$

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra : I(1 , 1) ; $MI^2 = (5-1)^2 + (-2-1)^2 = 16 + 9 = 25$; $R^2 = IA^2 = 9 + 4 = 13$

Do đó : $P^M/(ABC) = MI^2 - R^2 = 25 - 13 = 12 \Rightarrow MI > R$ Vậy điểm M ở ngoài đường tròn (ABC)

Ta cũng có : $MT^2 = P^M/(ABC) = 12 \Leftrightarrow MT = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

C . Bài tập rèn luyện :

2 .1 Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tinh các tích vô hướng sau : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$ (G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của BC)

2 . 2 .Cho tam giác ABC vuông tại A : AB = 3 ; AC = 4. Tính các góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})$ và các tích vô hướng sau : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

2. 3 .Cho tam giác ABC vuông tại A ; AB = 3 , AC = 4 . Trên tia AB lấy điểm D sao cho BD = 4 Tính các tích vô hướng sau : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI}$ (I là trung điểm của CD)

2 .4 . Cho tam giác ABC đều , cạnh bằng a , G là trọng tâm tam giác ; M là một điểm bất kỳ . Chứng minh rằng T = ($\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GA}$) có giá trị không đổi . Tính giá trị này .

2 .5 . Cho hình vuông ABCD , cạnh bằng a . Dùng định lý hình chiếu tính các tích vô hướng sau :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).\overrightarrow{AB}$ (O là tâm hình vuông)

* 2 .6 . Cho tam giác ABC đều , cạnh bằng a . Tìm tập hợp các điểm M thỏa :

$$(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{CM} = \frac{3a^2}{4}$$

2 . 7 .Cho tam giác ABC có trọng tâm là G .Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}(GA^2+GB^2+GC^2)$$

2 .8. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a ; I là trung điểm của CD . Tính các tích vô hướng sau : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI}$; $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG}$ (G là trọng tâm tam giác ABD)

2 .9 .Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 4 ; AD = 3 và điểm M thỏa $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.Định k để 2 đường thẳng AC và DM vuông góc

2 . 10 . Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên tia đối của tia AB ,lấy điểm D sao cho AD = AC ; trên tia đối của tia AC , lấy điểm E saocho AE = AB .
Chứng minh rằng đường trung tuyến của tam giác ADE thì vuông góc với BC

2 . 11 . Cho : $\left|\vec{a}\right|=6$; $\left|\vec{b}\right|=3$.Định x để hai vectơ sau vuông góc với nhau $(\vec{a}+x\vec{b})$; $(\vec{a}-x\vec{b})$

2 . 12. Cho tam giác ABC vuông tại A ; D thuộc tia AC và AD = 3AC Chứng minh rằng $AG^2=\frac{1}{9}(AB^2+16AC^2)$ (G là trọng tâm tam giác BCD)

* 2 .13. Cho tứ giác ABCD

a) Chứng minh rằng ; $AB^2-BC^2+CD^2-DA^2=2\overrightarrow{AC}\overrightarrow{DB}$

b)Suy ra rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD có 2 đường chéo vuông góc là $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$

2 . 14 . Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa :

$a)\ (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=0$

* $b)\ \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$

* 2 .15 . Cho tam giác ABC đều , cạnh bằng a . Tìm tập hợp các điểm M thỏa : $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC}=a^2$

2 . 16 . Cho hai điểm A(1 , 2) ; B(6 , 3) . Tìm tọa độ điểm C nằm trên trục Ox biết rằng tam giác ABC vuông tại C .

2 . 17 . Cho 4 điểm A(- 1 , 0) ; B(0 , 3) ; C(3 , 2) ; D(5 , - 2) . Chứng minh rằng tứ giác ABCD là một hình thang vuông . Tính diện tích của hình thang này

.

D. Hướng dẫn giải hay đáp số

2 .1 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GB}=AB.GB.\cos 30^o=a.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=AB.CM.\cos 60^o=a.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}$.

$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})=AB^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2-2a.a.\cos 60^o=a^2-2a^2.\frac{1}{2}=0$

2 .2 .$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ vá góc ABC bù nhau ;cosABC = (3 : 5) = 0,6 Suy ra

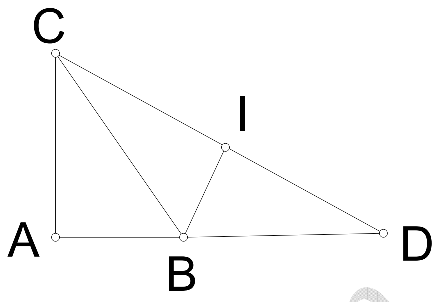
ABC = $53^o7'48'' \Rightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=180^o-53^o7'48''=126^o52'12''$

$$\cos ACB = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = ACB = 90^o - ABC = 36^o 52'12''$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC.(-\frac{3}{5}) = 3.5.(\frac{-3}{5}) = -9$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = AC.BC.\frac{4}{5} = 4.5.\frac{4}{5} = 16$$



2.3 $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = BC.BD.\cos CBD$

$$= 5.4.(-\frac{3}{5}) = -12$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} \ (\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0)$$

$$= \overrightarrow{AC}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}AC^2 = 8$$

2 . 4 .Ta có :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM} \ ; \ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM} \ ; \ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM}$$

$$T = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= GA.GB.\cos 120^o + GB.GC.\cos 120^o + GC.GA.\cos 120^o - 0$$

$$= 3(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2.(-\frac{1}{2}) = -\frac{a^2}{2} \ (do \ GA = GB = GC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

2.5 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -a^2$

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD} = -a^2$$

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OB} = OB^2 = (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{a^2}{2}$$

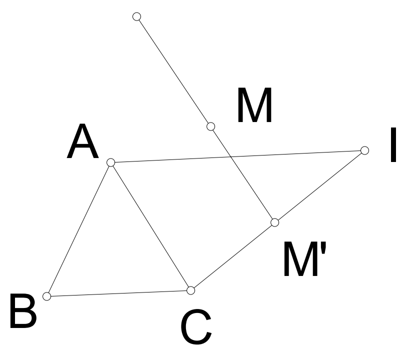
*2 .6 . Ta có :

Vẽ $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CI}$

(I cố định và tam giác ACI là nửa tam giác đều)

$$(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CM}$$

$$= \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CM'}$$



Theo giả thiết : $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CM'} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow CM' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}CI$

Vậy tậphợp các điểm M là đường trung trực của đoạn CI

2 . 7 .Ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

2 .8 .

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BD}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

$$= \frac{1}{2}BD^2 + \frac{1}{2}BC^2 + 0 = \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB})$$

$$= \frac{1}{6}(0 + a^2 + a^2 + 2a^2) = \frac{2a^2}{3}$$

2.9. $AC \perp DM \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DM} = 0$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(k\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow kAB^2 - AD^2 = 0 \Leftrightarrow k.16 - 9 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{9}{16}$$

2 . 10 . Gọi AI là trung tuyến của tam giác ADE , ta có :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}).(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(0 + AD.AB - AE.AC - 0)$$

$$= \frac{1}{2}(AC.AB - AB.AC) = 0 \Leftrightarrow AI \perp BC$$

2. 11 . x = ± 2

2 .12 .Ta có :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC})$$

$$AG^2 = \overrightarrow{AG}^2 = \frac{1}{9}(AB^2 + 16AC^2 + 8\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{9}(AB^2 + 16AC^2)$$

2.13.*a*) $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DA}^2$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})$$

$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BD})$$

$$= 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

b) $AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 0$

$$\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

2 .14 . a) Tập hợp các điểm M là đường thẳng d qua A và vuông góc với trung tuyến AI của tam giác ABC

b) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.(2\overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{MI}) = 0 \quad \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MK} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MK$

(J , I , K lần lượt là trung điểm của AB , BC , IJ) .Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn dường kính AK

$$2.15.(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC}=a^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MC}=a^2 \Leftrightarrow MJ^2-JC^2=\frac{a^2}{2}.$$

$$JM^2=\frac{a^2}{2}+(\frac{a\sqrt{3}}{4})^2=\frac{8a^2+3a^2}{16}=\frac{11a^2}{16} \Leftrightarrow JM=\frac{a\sqrt{11}}{4}$$

(I , J lần lượt là trung điểm của AB , CI) . Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (J , $\frac{a\sqrt{11}}{4}$)

2 16 , Có hai điểm C : C(2 , 0) ; C(7 , 0)

2 17 . Hình thang ABCD vuông tại A và D . Diện tích của hình thang này bằng 15

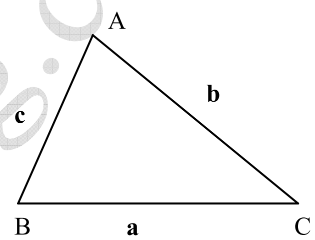
§2. Hệ thức lượng trong tam giác

A . Tóm tắt giáo khoa

1 .Định lý cosin : Trong một tam giác ABC , bình phương một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh còn lại trừ đi tích của hai cạnh đó nhân với cosin của góc xen giữa chúng

.

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}}$$



Suy ra :

$$\boxed{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

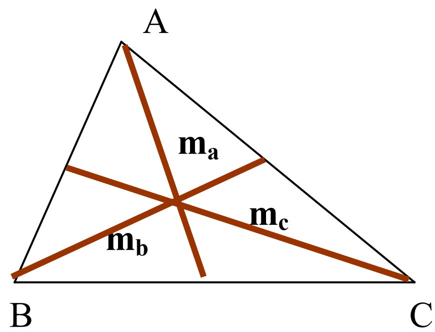
2 .Định lý sin : Trong một tam giác ABC , tỉ số giữa một cạnh và sin của góc đối diện cạnh đó bằng đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$

3 .Công thức tính độ dài đường trung tuyến

.

$$m_a{}^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$
$$m_b{}^2=\frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$$
$$m_c{}^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

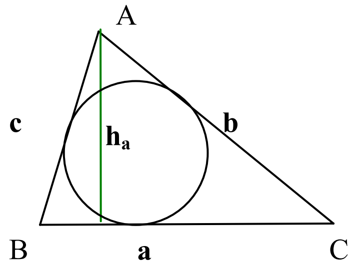


(AB = c ; BC = a ; CA = b ; m_a ; m_b ; m_c là các trung tuyến vẽ từ A ,B ,C)

4 . Công thức tính diện tích :

Diện tích S của tam giác ABC được tính bởi các công thức sau :

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$
$$S = \frac{abc}{4R}$$
$$S = pr$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



(với p = $\frac{1}{2}$ (a+b+c) ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ; r là bán kính đường tròn nội tiếp)

5 . Giải tam giác :
Giải tam giác là tìm một số yếu tố của tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó

B . Giải toán

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC có BC = 40cm ; CA = 13cm ; AB = 37cm Tính góc nhỏ nhất của tam giác ABC .

Giải :
Ta biết rằng : đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhỏ nhất .Ta lại có :
CA < AB < BC nên B < C < A . Vậy B là góc nhỏ nhất . Theo công thức ta có :

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{37^2 + 40^2 - 13^2}{2.37.40} = \frac{2800}{2960} = 0,9459$$
$$\Rightarrow B = 18^o55'$$

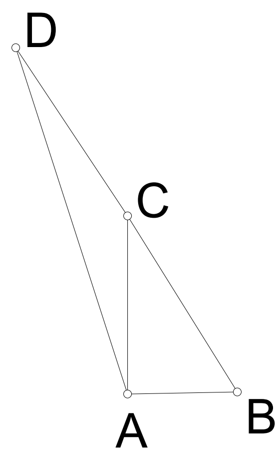
Vậy góc nhỏ nhất của tam giác ABC là góc B và B = $18^o55'$

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC vuông tại A và AB = 3 ; AC = 4 . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho CD = CB . Tính các cạnh BD , AD ; các góc B , D , A của tam giác ABD ; bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích của tam giác này

Giải

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9+16} = 5 \,; BD = 2BC = 10$$
$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \,; \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

Ta có $AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA.BD\cos B$
$$= 9 + 100 - 2.3.10.\frac{3}{5} = 73$$
$$AD = \sqrt{73}$$



Ta cũng có

$$\cos B = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow B = 53^o7'$$

$$\frac{AB}{\sin D} = \frac{AD}{\sin B} \Rightarrow \sin D = \frac{AB\sin B}{AD} = \frac{3.\frac{4}{5}}{\sqrt{73}} = 0,2808$$

$$D = 16^o18'$$

Suy ra : BAD = $180^o - (53^o7' + 16^o18') = 110^o25'$

Bán kính đường tròn ngọai tiếp tam giác ABD cho bởi công thức :

$$R = \frac{AD}{2\sin B} = \frac{\sqrt{73}}{2\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{73}}{8} = 5,34$$

Ta lại có 2 tam giác ABC và ACD có diện tích bằng nhau (vì có chung đường cao vẽ từ A và 2 cạnh đáy BC ,CD bằng nhau) Do đó :

$$S_{ABD} = 2S_{ABC} = 2.\frac{1}{2}.AB.AC = 3.4 = 12$$

Ví dụ 3 : Cho tam giác ABC có AB = 5cm ; AC = 7cm ; cosA=$\frac{4}{5}$ Tính diện tích , bán kính đường tròn ngọai tiếp , nội tiếp của tam giác và đường cao vẽ từ A

Giải :

Ta có :

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \quad ; S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}5.7.\frac{3}{5} = \frac{21}{2} = 10,5cm^2$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 25 + 49 - 2.5.7.\frac{4}{5} = 18 \Leftrightarrow BC = 3\sqrt{2}cm$$

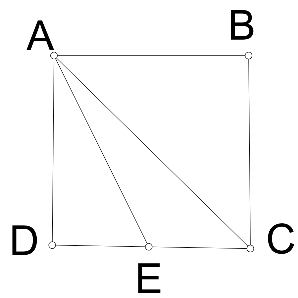
$$2R = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{3\sqrt{2}}{2.\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}cm$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{21}{2}}{\frac{5+7+3\sqrt{2}}{2}} = \frac{21}{12+3\sqrt{2}}cm$$

$$S = \frac{1}{2}AH.BC \Leftrightarrow AH = \frac{2S}{BC} = \frac{21}{3\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}cm$$

Ví dụ 4 : Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 6cm ; E là trung điểm của CD . Tính bán kính đường tròn ngọai tiếp tam giác ACE và càc góc của tam giác này

Giải : Tacó



$AC = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}cm$; $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 3\sqrt{5}cm$; $ACE = 45^o$

$$R_{(ACE)} = \frac{AE}{2\sin ACE} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}cm$$

$$\sin AED = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = 0,8944 => AED = 63^o25'$$

$$AEC = 180^o - 63^o25' = 116^o35' => CAE = 180^o - (116^o35' + 45^o) = 18^o25'$$

Ví dụ 5 : Trong một tam giác ABC bất kỳ , chứng minh rằng :

$a)\ h_a = 2R\sin B\sin C$

$b)\ S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

(h_a là đường cao vẽ từ A ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và S là diện tích của tam giác ABC)

Giải :

Ta có :

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Leftrightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc}{a} = \frac{2R\sin B.2R\sin C}{2R\sin A} = 2R\sin B\sin C$$

$$(do\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$$

Theo câu a) ta cũng có :

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}(2R\sin A).(2R\sin B\sin C) = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

Ví dụ 6 : Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a . Một đường tròn có bán kính bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, qua 2 đỉnh A , C và cắt cạnh BC tại E . Tính đoạn AE và góc BAE

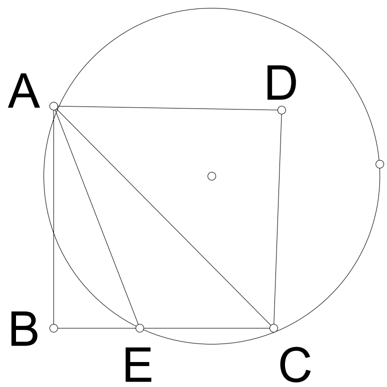
Giải :

Ta có :ACE $= 45^o$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ Do đó , theo định lý sin

$$\frac{AE}{\sin 45^o} = 2.\frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow AE = 2.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Tam giác vuông ABE cho :

$$\cos BAE = \frac{AB}{AE} = \frac{a}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} => BAE = 30^o$$



Ví dụ 7 : Cho tam giác ABC có BAC $=120^o$ .AD là phân giác trong của góc A (D thuộc cạnh BC) .Chứng minh rằng tổng hai bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và tam giác ADC bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Giải :

Ta có

$BAD = DAC = 60^o \Rightarrow$

$\sin BAD = \sin DAC = \sin BAC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Theo định lý sin , ta có :

$$2R_{(ABD)} = \frac{BD}{\sin BAD} = \frac{BD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \; ; \; 2R_{(ADC)} = \frac{DC}{\sin DAC} = \frac{DC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2R_{(ABC)} = \frac{BC}{\sin BAC} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BD+DC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R_{(ABD)} + 2R_{(ADC)}$$

$$\Leftrightarrow R_{(ABC)} = R_{(ABD)} + R_{(ADC)}$$

Ví dụ 8 : Cho tam giác ABC vá điểm M thuộc cạnh BC .Biết rằng :
$BAM = \alpha$; $CAM = \beta$ .Chứng minh rằng $AM = \dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{c\sin\alpha + b\sin\beta}$

Giải :

Ta có :

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)$$

$$S_{(ABM)} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin BAM = \frac{1}{2}AM.c.\sin\alpha$$

$$S_{(ACM)} = \frac{1}{2}AC.AM.\sin CAM = \frac{1}{2}AM.b.\sin\beta$$

Mà :

$$S_{(ABC)} = S_{(ABM)} + S_{(ACM)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}AM(c\sin\alpha + b\sin\beta)$$

$$Suy\,ra\;\; AM = \frac{bc\sin(\alpha+\beta)}{c\sin\alpha + b\sin\beta}$$

Ví dụ 9 : Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là
$m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$ (m_a, m_b, m_c là 3 trung tuyến vẽ từ A,B,C)

Giải :

Ta có :

$$m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2 \Leftrightarrow \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} = 5\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 10b^2 + 10c^2 - 5a^2$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 = 9(b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A

Ví dụ 10 : Cho tam giác ABC có AB = c = 45 ; AC = b = 32 ; BAC = 87^o . Tính các cạnh và các góc còn lại

Giải :

Ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 87^o = 32^2 + 45^2 - 2.32.45.\cos 87^o$$
$$= 2898 \Rightarrow a = \sqrt{2898} = 53,8$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{45^2 + 2898 - 32^2}{2.45.53,8} = 0,8052$$
$$\Rightarrow ABC = 36^o 22'$$
$$\Rightarrow ACB = 180^o - (87^o + 36^o 22') = 56^o 38'$$

C. Bài tập rèn luyện .

2 . 18 .Cho tam giác ABC có ba cạnh bằng 10cm ; 13cm ; 17cm . Tính diện tích ,bán kính đường tròn ngọai tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác

2 . 19 . Cho tam giác ABC vuông tại A ; AB = 3 ; AC = 4 . Trên tia BC lấy điểm D saocho CD = 7 ; trên tia BA lấy điểm E sao cho AE = 5 .Tính các cạnh và các góc của tam giác ADE

2 . 20 Tam giác ABC có 3 cạnh là BC = a ; CA = b ; AB = c và trung tuyến AM = $\frac{c}{2}$

Chứng minh rằng $2b^2 = a^2 - c^2$; $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$

2 .21 Cho tam giác ABC nhọn có AB = 3cm ; AC = 4cm và diện tích S = $3\sqrt{3}cm^2$ Tính cạnh BC và .đường cao AH của tam giác này .

2 .22 . Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a , O là tâm của hình vuông và E là trung điểm của AB . Tính bán kính đường tròn ngọai tiếp , diện tích và các góc của tam giác OCE

2 .23 .Cho tam giác ABC có BC = a ; CA = b ; AB = c .Chứng minh rằng

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$$

2 . 24 . Cho tam giác ABC có : $BAC = 60^o$; $BC = \sqrt{7}$; $AC = 2$. Tính cạnh AB và các góc của tam giác này

2 .25. Cho tam giác ABC có BC = a ; CA = b ; AB = c và các cạnh này thỏa điều kiện $b^2 + c^2 = 5a^2$ Chứng minh rằng hai trung tuyến vẽ từ B và C thì vuông góc với nhau

2 . 26 . Cho tam giác ABC có : AB = 3cm ; AC = 2x(cm) ; BC = 5cm .
   a) Định điều kiện của x (để ABC là một tam giác)
   b) Định x để góc BAC = 60^o

* 2 . 27 . a) Cho tam giác MPQ có trung tuyến là MR .Chưng minh rằng

$$MP^2 + MQ^2 = 2MR^2 + \frac{PQ^2}{2}$$

   b) Cho tam giác ABC vuông tại A và có BC = 6 . Trên đường thẳng BC lấy 2 điểm D và E sao cho BD = BE = 1 .Chứng minh rằng $AD^2 + AE^2 + 2AC^2 = 74$

2 .28 .Cho hình thang vuông ABCD (A = B = 90^o)và AB =4cm ;AD = 3cm ; BC = 11cm . Tính bán kính đường tròn ngọai tiếp tam giác BCD

. .

D . Hướng dẫn giải hay đáp số

2 .18 .

$$p = \frac{1}{2}(10+13+17) = 20cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{20.10.7.3} = 10\sqrt{42} = 64,80cm^2$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{10.13.17}{4.10\sqrt{42}} = \frac{221}{4\sqrt{42}} = 8,52cm$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{42}}{20} = 3,24cm$$

2.19. $BC = \sqrt{AB^{25} + AC^2} = \sqrt{9+16} = 5 \Rightarrow BD = 5+7 = 12$

$BE = 3+5 = 8$

$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2BD.BE.\cos B$

$= 144 + 64 - 2.12.8.\frac{3}{5} = \frac{464}{5} \Rightarrow DE = 9,63$

$\cos B = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow B = 53^o7'$

$\sin B = \frac{4}{5} = 0,8$; $\frac{DE}{\sin B} = \frac{BE}{\sin D} \Rightarrow \sin D = \frac{BE\sin B}{DE}$

$\sin D = \frac{8.0,8}{9,63} = 0,6645 \Rightarrow D = 41^o38'$

$E = 180^o - (41^o38' + 53^o7') = 75^o15'$

2 .20 . Áp dụng công thức về đường trung tuyến :

$$AM^2 = m_a{}^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{c^2}{4} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - c^2 = 2b^2$$

Theo định lý sin , ta có : a = 2RsinA ; b =2RsinB ; c = 2RsinC nên :

$$4R^2\sin^2 A - 4R^2\sin^2 C = 2(4R^2\sin^2 B)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 C = 2\sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$$

2 .21 .Ap dụng công thức :

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A \Leftrightarrow 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}3.4.\sin A$$

(vì góc A nhọn)

$$\Leftrightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60^o$$

Ta lại có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^o = 9 + 16 - 2.3.4.\frac{1}{2} = 13 \Rightarrow BC = \sqrt{13}$$

$$AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2.3\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{39}}{13}$$

2 . 22 . Ta có :

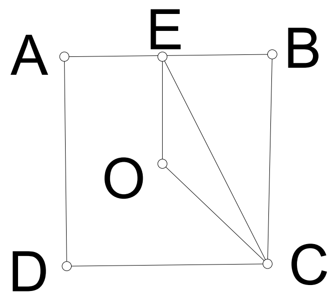
$$EOC = 135^o \;;\; EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$R_{(EOC)} = \frac{EC}{2\sin EOC} = \frac{a\sqrt{5}}{4.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$OEC = ECB \;;\; \tan ECB = \frac{EB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$OEC = ECB = 26^o33'$$

$$OCE = 180^o - (135^o + 26^o33') = 18^o27'$$



2 .23 .Ta có :

$$\sin A = \frac{a}{2R};\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{abc}{R(c^2+a^2-b^2)} => \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$$

2 .24 .Đặt AB = x (x > 0) . Ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A \Leftrightarrow$$

$$7 = x^2 + 4 - 2.x.2.\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 : AB = 3$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow \sin B = \frac{AC\sin 60^o}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 0,6546$$

$$B = 40^o53' \;;\; C = 180^o - (60^o + 40^o53') = 79^o7'$$

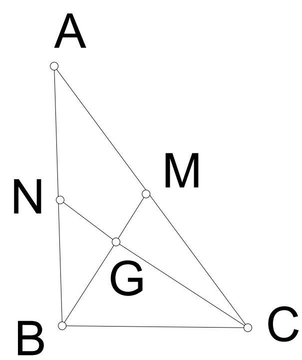
2 .25 . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Để chứng minh BM vuông góc với CN ta chỉ cần chứng minh tam giác BGC vuông tại G. Ta có:

$$GB^2 + GC^2 = (\frac{2}{3}BM)^2 + (\frac{2}{3}CN)^2$$

$$= \frac{4}{9}.\frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4} + \frac{4}{9}.\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

$$= \frac{1}{9}\left[2(c^2+a^2) - b^2 + 2(a^2+b^2) - c^2\right]$$

$$= \frac{1}{9}(4a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{9}(4a^2 + 5a^2) = a^2 = BC^2$$



Vậy tam giác BGC vuông tại G

2 .26 a) Điều kiện để ABC là một tam giác là :
BC – AB < AC < BC+AB ⇔ 5 - 3 < 2x < 5+3 ⇔ 1 < x < 4

b) Ta lại có :

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4 + 4x^2 - 25}{2.3.2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{73}}{4} (do\, 1 < x < 4)$$

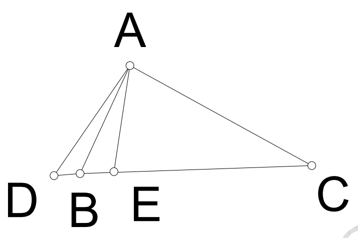
$$2.27.a)\, MP^2 + MQ^2 = \overrightarrow{MP}^2 + \overrightarrow{MQ}^2 = (\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RP})^2 + (\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RQ})^2$$
$$= MR^2 + RP^2 + 2\overrightarrow{MR}.\overrightarrow{RP} + MR^2 + RQ^2 + 2\overrightarrow{MR}.\overrightarrow{RQ}$$
$$= 2MR^2 + RP^2 + RQ^2 + 2\overrightarrow{MR}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$$
$$= 2MR^2 + \frac{PQ^2}{2}\left(RP = RQ = \frac{PQ}{2}; \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ} = \vec{0}\right)$$

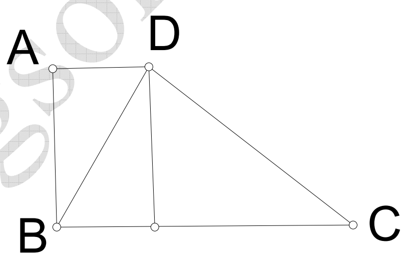
Theo câu a) , ta có :

$$AD^2 + AE^2 = 2AB^2 + \frac{DE^2}{2} = 2AB^2 + 2\,(do\ DE = 2)$$
$$AD^2 + AE^2 + 2AC^2 = 2AB^2 + 2 + 2AC^2 = 2(AB^2 + AC^2) + 2$$
$$= 2BC^2 + 2 = 2.36 + 2 = 74$$

2 . 28 .

$$DC^2 = AB^2 + (BC - AD)^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow DC = 4\sqrt{5}$$
$$DBC = ADB\ ; \sin ADB = \frac{AB}{BD} = \frac{4}{5}$$
$$R_{(BDC)} = \frac{DC}{\sin DBC} = \frac{4\sqrt{5}}{\frac{4}{5}} = 5\sqrt{5}$$





§3. Câu hỏi trắc nghiệm cuối chương

A. Đề

1 . Cho $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a}.\vec{b} = -\frac{1}{2}$. Góc $(\vec{a}, \vec{b})$ (tính ra độ) bằng :

a . 60^o b . 120^o
c . 30^o d . một đáp số khác

2 . Cho $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$. Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ bằng :

a . -1 b . 1
c . 2 d . -2

3 . Cho $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$; $|(\vec{a} + 3\vec{b})| = 5$. Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ bằng :

a . 2 b . 3
c . 4 d . một đáp số khác

4 . Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a . Nếu $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ thì đoạn AM bằng :

a .3a b . $a\sqrt{3}$
c . $a\sqrt{5}$ d .một đáp só khác

5 . Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 5 ; AD = 3 và điểm I xác định bởi

$\overrightarrow{CI} = k\overrightarrow{AB}$. Nếu 2 đường thẳng AC và BI vuông góc với nhau thì k bằng:

a . 0,36 b. – 0,36
c , 0,6 d . một đáp số khác

6 . Tam giác ABC có BC = a = $\sqrt{2x+1}$; AC = b = 2 ; AB = c = 3 . Nếu góc A của tam giác bằng 60^o thì giá trị của x là :

a . 2 b . 3
c . 4 d . một đáp số khác

7 .Cho tam giác ABC có 3 cạnh thỏa : $BC^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{2}{3}AB.AC$. Góc A của tam giác gần bằng góc nào dưới đây nhất :

a . 109^o b .110^o
c . 70^o d . 71^o

8 . Tam giác ABC có B = 30^o ; C = 45^o . Hệ thức nào sau đây đúng

a . AB = 2AC b . $AC\sqrt{2}$ = AB
c . AC = 2AB d . 2AB = $AC\sqrt{3}$

9 . Trong một tam giác , nếu tổng bình phương 3 đường trung tuyến bằng 30 thí tổng bình phương 3 cạnh của tam giác sẽ bằng :

a .34 b . 36
c . 38 d .một đáp số khác

10 . Cho tam giác có ba cạnh là : 3m ; 4m ; 6m .Góc lớn nhất của tam giác gần bằng góc nào dưới đây nhất

a. 63^o b. 64^0
c. 116^0 d. 117^0

11 . Cho tam giác ABC vuông tại A và có AB = 2a ; BC = 4a . E là một điểm thuộc tia đối của tia BC . Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ACE bằng 3a thì đoạn AE sẽ bằng

a . 3a b . 4a
c . 5a d . một đáp số khác

12 .Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a . Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho AE = $3a\sqrt{2}$. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE bằng

a .5a b. 4a
c .3a d . một đáp số khác

13 . Một tam giác có ba cạnh là 4 , 5 , 7 . Đường cao nhỏ nhất của tam giác này gần bằng số nào dưới đây nhất

a . 2,8 b . 3
c . 3,2 d . 3,4

14 . Tam giác ABC có : AC+BC = 6 ; sinA + sinB = 1,5 . Hệ thức nào dưới đây đúng :

a . AB = 2sinC b .AB = 3sinC
c . AB = 4sinC d AB = 6sinC

15 . Tam giác ABC vuông tại A và có AB = a ; BC = 2a . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = 3a .Đoạn AD gần bằng đoạn nào dưới đây nhất :

a. 3,4a b . 3,5a
c . 3,6a d . 3,7a

16 .Cho tam giác ABC có AB = 3 ; AC = 5 . Gọi R ,R' lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABM và tam giác ACM (M là một điểm thuộc cạnh BC) Hệ thức nào sau đây đúng

a . R = 0,5R' b . R = 0,6R'

c . R = 0,7R’ d . R = 0,8R’

17 .Tam giác ABC có các cạnh thỏa

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC; CA^2 = BA^2 + BC^2 - BC.BA$

Góc C của tam giác bằng :

a . 30^o b . 45^o

c . 60^o d . một đáp số khác

18 . Tam giác ABC có các cạnh thỏa :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \;;\; AC^2 = BC^2 + BA^2 - \frac{6}{5}BC.BA$$

cosC của tam giác bằng :

a . 0,5 b .0,6

c . 0,7 d .0,8

19 . Tam giác ABC có AB = 4 ;BC = 10 ; trung tuyến AM = 3 . Bình phương của cạnh AC bằng :

a. 50 b . 51

c . 52 d . một đáp số khác

20 . Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngọai tiếp là R = 4 .Nếu sinB + 2sinC = 1 thì (AC + 2AB) bằng :

a .5 b .6

c .7 d .8

B. Bảng trả lời

1 . b	6 .b	11 .a	16 .b
2 .a	7 . a	12 .c	17 .c
3 .d	8 .b	13 .a	18 .d
4 .c	9 .d	14 . c	19 .c
5 .b	10 .d	15 .c	20 .d

C. Hướng dẫn giải :

1b . Ta có
$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = 1.1\cos(\vec{a},\vec{b})$$
$$\Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 120^o$$

2 a .
$$(\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-2\vec{b}) \Leftrightarrow (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - 2\vec{b}^2$$
$$\Leftrightarrow 1 - \vec{a}.\vec{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = -1$$

3d .
$$|\vec{a}+3\vec{b}| = 5 \Leftrightarrow (\vec{a}+3\vec{b})^2 = 25 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 6\vec{a}.\vec{b} + 9\vec{b}^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow 1 + 6\vec{a}.\vec{b} + 9.4 = 25 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = -2$$

$$4b.\ AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 4AB^2 + AD^2 + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$
.
$$= 5a^2 \ (do\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0)$$
$$\Rightarrow AM = a\sqrt{5}$$

5b .

$$BI \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI})(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = 0$$

.
$$\Leftrightarrow BC^2 + kBA^2 = 0 (do\ \overrightarrow{CI} = k\overrightarrow{AB} = -k\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 0)$$

$$\Leftrightarrow 9 + 25k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{25} = -0,36$$

6 b . Định lý cos cho

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow 2x + 1 = 4 + 9 - 2.3.2.\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

7a . Định lý cos cho :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + \frac{2}{3}AB.AC = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = -\frac{1}{3} = -0,3333 \Rightarrow A = 109^o29'$$

(cos $70^o31' = 0,3333$ và A là góc bù của góc này)

8b . Định lý sin cho

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{AC}{\sin 30^o} = \frac{AB}{\sin 45^o} \Leftrightarrow \frac{AC}{\frac{1}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow AB = AC\sqrt{2}$$

9d . Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến ,ta có :

$$m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 30 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 40$$

10d . Đối diện với cạnh lớn nhất BC = 6m sẽ là góc A lớn nhất ,mà

cosA= $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{9 + 16 - 36}{2.3.4} = -\dfrac{11}{24} = -0,4583$

$$\Rightarrow A = 117^o17'$$

11a . Tam giác ABC là nửa tam giác đều .Định lý sin cho :

$$\frac{AE}{\sin 30^o} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{AE}{2\sin 30^o} = 3a$$

12c . Ta có $ACE = 135^o; \dfrac{AE}{\sin 135^o} = 2R \Leftrightarrow R = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3a$

13 a. Đường cao nhỏ nhất h là đường cao tương ứng với cạnh lớn nhất nghĩa là cạnh bằng 7 .
Ta lại có

$$p = \frac{1}{2}(4+5+7) = 8$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8.4.3.1} = 4\sqrt{6}$$
$$h = \frac{2S}{7} = \frac{8\sqrt{6}}{7} = 2,79$$

14c . Định lý sin cho :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC+BC}{\sin A+\sin B} = \frac{6}{1,5} = 4$$
$$\Rightarrow AB = 4\sin C$$

15c . Tam giác ABC là nửa tam giác đều

$$ABD = 120^o;\ AD^2 = BD^2 + BA^2 - 2BA.BD.\cos 120^o$$
$$AD^2 = 9a^2 + a^2 - 2.a.3a.(-\frac{1}{2}) = 13a^2$$
$$AD = a\sqrt{13} = 3,605a$$

16b . Ta có sinAMB = sinAMC (góc bù nhau) Định lý sin cho

$$2R = \frac{AB}{\sin AMB};\ 2R' = \frac{AC}{\sin AMC} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6$$
$$\Rightarrow R = 0,6R'$$

17c . Giả thiết cho $A = B = 60^o \Rightarrow C = 60^o$

18d . Tam giác ABC vuông tại A (do $BC^2 = AB^2 + AC^2$)
Hệ thức hai cho :

$$\cos B = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos C = \sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

19c . Công thức tính độ dài trung tuyến cho

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$9 = \frac{2(16 + AC^2) - 100}{4} \Leftrightarrow AC^2 = \frac{1}{2}(100+36-32) = 52$$

20d . Định lý sin cho :

$$2R = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{2AB}{2\sin C} = \frac{AC+2AB}{\sin B + 2\sin C} \Leftrightarrow$$
$$8 = \frac{AC+2AB}{1}$$