

Trần Thành Minh – Phan Lưu Biên - Trần Quang Nghĩa



**HÌNH HỌC 10**  
**Chương 1.**

**VECTƠ**

www.saosangsong.com.vn

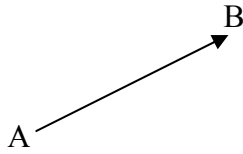
[www.saosangsong.com.vn/](http://www.saosangsong.com.vn/)  
**SAVE YOUR TIME & MONEY**  
**SHARPEN YOUR SELF-STUDY SKILL**  
**SUIT YOUR PACE**

**§ 1. Các định nghĩa :**

**A. Tóm tắt giáo khoa :**

**Vectơ** là đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

Ký hiệu :  $\overrightarrow{AB}$ , điểm đầu A và điểm cuối B  
 Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó



Độ dài của vectơ AB được ký hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$

Như vậy :  $|\overrightarrow{AB}| = AB$

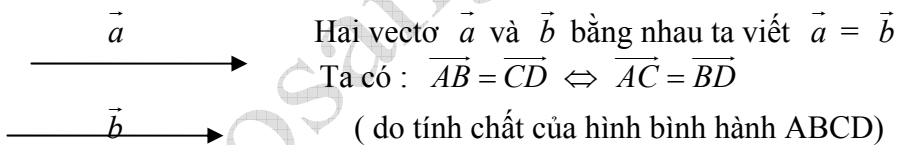
Nếu không nói rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ ta ký hiệu :  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$

**Hai vectơ gọi là cùng phương** nếu chúng nằm trên hai đường thẳng song song, hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



- Hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  cùng hướng
- Hai vectơ  $\overrightarrow{EF}$  và  $\overrightarrow{GH}$  ngược hướng

**Hai vectơ bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài



**Vectơ-không** là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau :  $\vec{0}$

Như vậy vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ

Cho trước điểm A và vectơ  $\vec{a}$  thì ta dựng được điểm B duy nhất sao cho :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

**B. Giải toán :**

**Ví dụ 1 :** Cho hai điểm phân biệt A và B. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng và bao nhiêu vectơ khác nhau?

**Giải**

Một đoạn thẳng duy nhất AB hoặc BA

Hai vectơ khác nhau là  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$

**Ví dụ 2 :** Cho hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương. Kết luận gì về ba điểm A, B, C.

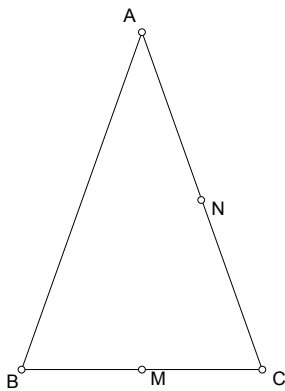
**Giải**

Hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương và có điểm A chung nên chúng nằm trên một đường thẳng. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng

**Ví dụ 3 :** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của AC.

- a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$  đúng hay sai?  
 b) Các vectơ nào cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$ ? ngược hướng với  $\overrightarrow{BC}$ ?  
 c) Các vectơ nào bằng nhau?

**Giải**



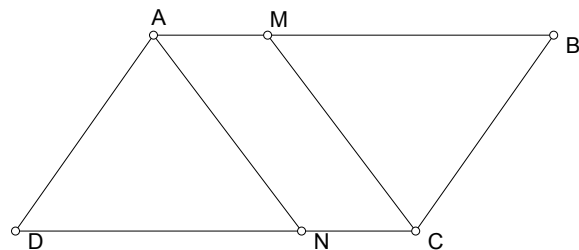
- a) Hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương nên chúng không bằng nhau  
 b) MN là đoạn nối trung điểm hai cạnh BC và AC nên MN và AB song song nhau. Vậy  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  là hai vectơ cùng hướng  
 Ba điểm B, C, M thẳng hàng nên các vectơ ngược hướng với  $\overrightarrow{BC}$  là :  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{CM}$ ,  $\overrightarrow{MB}$   
 c) Ta có :  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$  vì hai vectơ này cùng hướng và có độ dài bằng nhau. Ta cũng có :  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$ ,  $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$

**Ví dụ 4 :** Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M trên đoạn AB và điểm N trên đoạn CD sao cho  $AM = CN$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$  và  $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$ .

**Giải**

Ta có  $AM = CN$  ( theo gt)  
 và  $AM \parallel CN$  ( vì  $AB \parallel CD$ )  
 Do đó tứ giác AMNC là hình bình hành  
 Vậy  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$

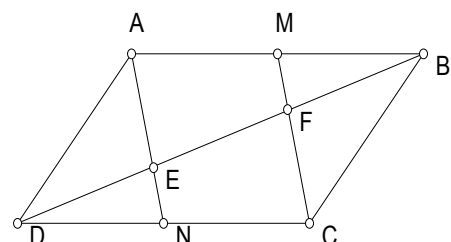


Tương tự tứ giác BMDN là hình bình hành. Vậy  $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$

**Ví dụ 5 :** Cho hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và DC. AN và CM lần lượt cắt BD tại E và F. Chứng minh  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$  nên AMCN là hình bình hành. Do đó  $AN \parallel MC$   
 Suy ra E là trung điểm của DF vì N là trung điểm của DC và F là trung điểm của EB vì M là trung điểm của AB



Vậy  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$

**C. Bài tập rèn luyện :**

1.1 : Cho hai điểm phân biệt A và B .Câu nào sau đây đúng?

- a) Có một đoạn AB hay BA
- b) Có hai vectơ khác nhau  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$
- c)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = AB$
- d) Cả ba câu đều đúng

1.2 : Cho điểm A .Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

- a)  $|\overrightarrow{AM}| = 4cm$
- b)  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$  cho trước

1.3 : Cho hình bình hành ABCD và E là điểm đối xứng của C qua D . Chứng tỏ :  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$

1.4 : Cho nửa lục giác đều ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AD .Chỉ ra các vectơ bằng với  $\overrightarrow{BC}$

1.5 : Cho tam giác ABC và điểm M ở trong tam giác.Gọi A' , B' ,C' lần lượt là trung điểm của BC,CA , AB và N, P, Q lần lượt là điểm đối xứng của M qua A' , B' , C'

- a) Chứng tỏ :  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CN}$  ;  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$
- b) Chứng tỏ ba đường thẳng AN , BP , CQ đồng qui

**D.Hướng dẫn giải và Đáp số :**

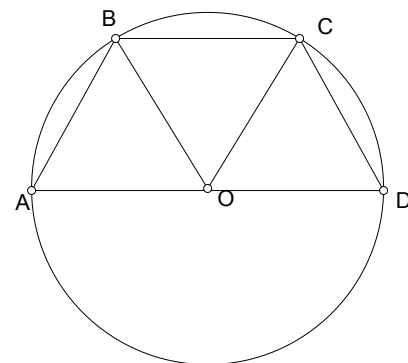
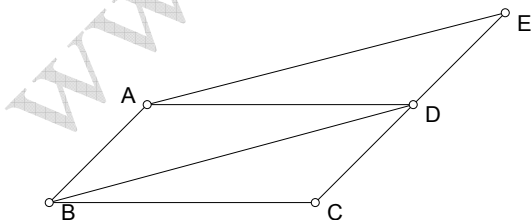
1.1. Cả 3 câu đều đúng

1.2. a) Điểm A cố định và độ dài AM = 4cm.Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A bán kính 4cm

b)  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$ .Vậy M chạy trên đường thẳng qua A và song song với đường thẳng mang vectơ  $\vec{a}$

1.3. E là điểm đối xứng của C qua D nên ta có DE = CD = BA và DE//BA

Do đó tứ giác ABDE là hình bình hành .Vậy  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$



1.4.Tứ giác ABOA là hình thoi nên  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD}$

1.5. Tứ giác AQBM là hình bình hành vì có hai đường chéo giao nhau tại trung điểm nên ta có :  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{MB}$  (1) và  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{QB}$  (3)

Tương tự tứ giác MBNC là hình bình

hành nên  $\overline{CN} = \overline{MB}$  (2)

Từ (1) và (2) ta có :  $\overline{AQ} = \overline{CN}$

Do đó tứ giác ACNQ là hình bình hành

Vậy hai đường chéo AN và CQ giao nhau tại trung điểm I

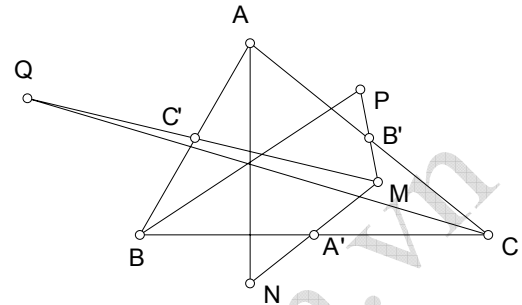
Mặt khác tứ giác AMCP là hình bình hành nên

$\overline{AM} = \overline{PC}$  (4)

Từ (3) và (4) ta có  $\overline{QB} = \overline{PC}$

Do đó tứ giác BCPQ là hình bình hành nên hai đường chéo BP và CQ giao nhau tại trung điểm I .

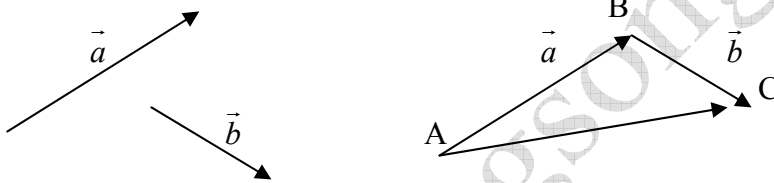
Vậy AN, BP và CQ đồng qui tại I



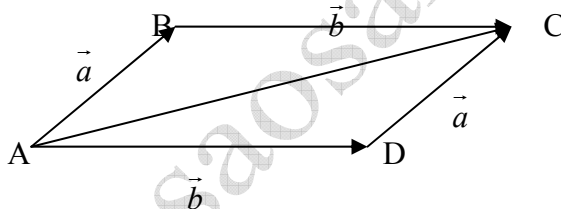
## § 2. Tổng và hiệu hai vectơ

### A. Tóm tắt giáo khoa :

**1. Định nghĩa tổng của các vectơ :** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Từ một điểm A tùy ý vẽ  $\overline{AB} = \vec{a}$ , rồi từ điểm B vẽ  $\overline{BC} = \vec{b}$  thì vectơ  $\overline{AC}$  được gọi là tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ký hiệu :  $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



Như vậy ta có :  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  với A, B, C tùy ý (gọi là quy tắc 3 điểm)



ABCD là hình bình hành nên  $\vec{a} = \overline{AB} = \overline{DC}$  và  $\vec{b} = \overline{BC} = \overline{AD}$

Như vậy  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$  ( gọi là quy tắc hình bình hành )

**2. Tính chất :** a) giao hoán :  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

b) kết hợp :  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

c) với mọi  $\vec{a}$  ta có :  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

d). Ta có  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\overline{AC}| = AC$  và  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = AB + BC$

Mà  $AC \leq AB + BC$  ( bất đẳng thức trong tam giác ABC)

$$\text{Vậy } |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

**3. Vectơ đối của một vectơ :**

Vectơ đối của vectơ  $\vec{a}$  là vectơ ngược hướng với  $\vec{a}$  và có cùng độ dài với  $\vec{a}$

Ký hiệu :  $-\vec{a}$

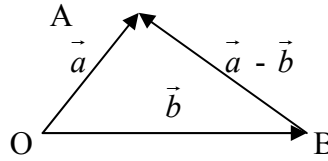
Như vậy  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Ta có  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

**4. Hiệu của hai vector :**

Hiệu của hai vector là tổng của vector thứ nhất với vector đối của vector thứ hai

Như vậy  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  với mọi điểm O, A, B

**B. Giải toán :**

**Ví dụ 1 :** Cho tam giác ABC vuông tại A biết  $AB = a$  và  $AC = 2a$ . Tính độ dài của vector tổng :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  và vector hiệu  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

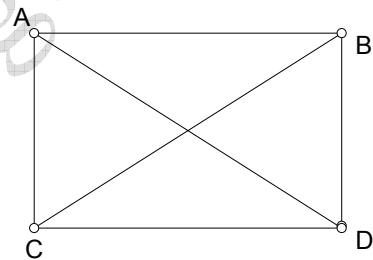
**Giải**

Theo qui tắc hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$  với AD là đường chéo hình bình hành ABDC. Mà góc A vuông nên ABDC là hình chữ nhật. Do đó  $AD = BC$ . Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông ABC ta có :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$

Vậy  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = BC = a\sqrt{5}$

Theo qui tắc hiệu vector ta có :  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$  Vậy :

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC = a\sqrt{5}$$



**Ví dụ 2 :** Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, D. Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$     b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$   
 c)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

**Giải**

a) Theo qui tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\text{Do đó : } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

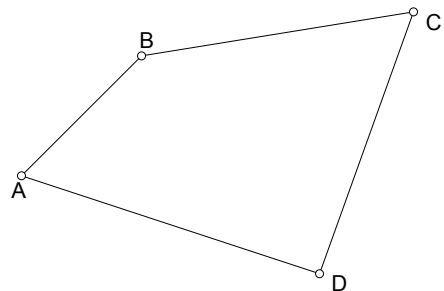
b) Theo qui tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

$$\text{vì } \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$$

c) Theo qui tắc phép trừ ta có :  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$



**Ví dụ 3 :** Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F tùy ý. Chứng minh rằng :  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

**Giải**

Theo qui tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} ; \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$$

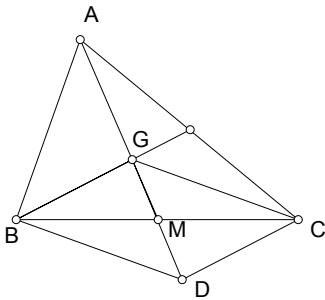
Cộng theo về 3 đẳng thức ta được :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$$

vì  $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FD}$  và  $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$

**Ví dụ 4 :** Cho tam giác ABC với M là trung điểm của BC và G là trọng tâm . Chứng minh rằng :  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

**Giải**



Vẽ hình bình hành BGCD . Theo qui tắc hình bình hành ta có :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$$

mà  $GD = 2GM$  ( tính chất đường chéo )

và  $GA = 2GM$  ( tính chất trọng tâm )

nên  $GD = GA$  Do đó  $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GD}$  (ngược hướng)

$$\text{Vậy : } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

**Ví dụ 5 :** Cho hai lực  $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$  đều có cường độ là 50N , có điểm đặt tại O và hợp với nhau một góc

$60^\circ$  . Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực này.

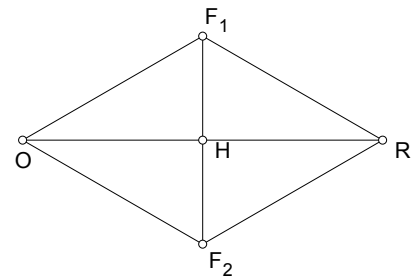
**Giải**

Theo qui tắc hình bình hành thì :  $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OR}$

Mà  $OF_1 = OF_2 = 50N$  nên  $OF_1 OF_2$  là hình thoi có góc O bằng  $60^\circ$  và hai đường chéo OR và  $F_1F_2$  vuông góc nhau tại trung điểm H

Ta có  $OH = 50 \frac{\sqrt{3}}{2}$  (đường cao tam giác đều cạnh bằng 50 .

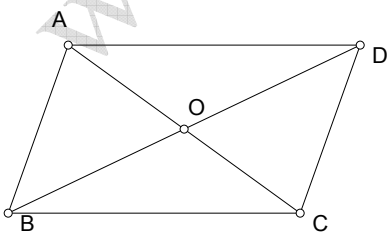
$$\text{Vậy } |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{OR}| = OR = 2OH = 50\sqrt{3} \text{ N}$$



**Ví dụ 6 :** Cho hình bình hành ABCD tâm O .Chứng minh rằng :

$$\text{a) } \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \quad \text{b) } \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

**Giải**



a) Theo qui tắc phép trừ ta có :

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$$

mà  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  vì ABCD là hình bình hành .

$$\text{Vậy : } \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

b) Ta có :  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$  mà  $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{BA}$  .

$$\text{Vậy : } \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

**Ví dụ 7 :** Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính độ dài các vectơ :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$  .

**Giải**

Theo qui tắc ba điểm ta có :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Vậy  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a$

Theo qui tắc phép trừ ta có :  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$

Vậy  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA}| = AB = a$

**C. Bài tập rèn luyện :**

1.6 : Cho hình bình hành ABCD tâm O và M là điểm tùy ý. Chứng minh :

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$       b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

1.7 : Cho tam giác ABC vuông tại A biết  $AB = a$  và góc  $B = 60^\circ$ . Tính độ dài các vectơ tổng và hiệu :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

1.8 : Cho hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng :

a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$       b)  $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

1.9 : Cho các vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ .

a) Khi nào thì ta có :  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

b) Khi nào thì ta có :  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

1.10 : Cho tam giác đều ABC cạnh a, đường cao AH. Tính độ dài các vectơ:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$       b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$       c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1.11 : Cho tam giác ABC. Nếu vectơ tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  nằm trên đường phân giác trong của  $\widehat{BAC}$  thì tam giác ABC là tam giác gì?

1.12 : Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính độ dài các vectơ :

a)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$       b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$       c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

1.13 : Cho hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  lần lượt có cường độ 60N và 80N, có điểm đặt tại O và vuông góc nhau. Tính cường độ lực tổng hợp của chúng.

**D. Hướng dẫn giải và đáp số :**

1.6 a) Theo qui tắc ba điểm ta có :  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

b) Ta có  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$

Vậy  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$  vì  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$  ( 2 vectơ đối )

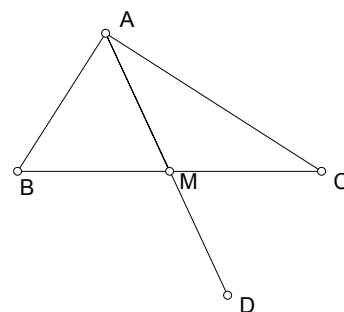
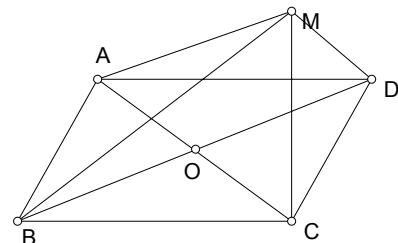
1.7. Tam giác ABC vuông tại A có góc  $B = 60^\circ$  là nửa tam giác đều  $BC = 2AB = 2a$  và  $AC = a\sqrt{3}$

a) Vẽ hình bình hành ABDC ta có :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$  và  $AD = 2AM$

Vậy  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AM = 2a$

b) Theo bài hiệu thì ta có :  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC = 2a$





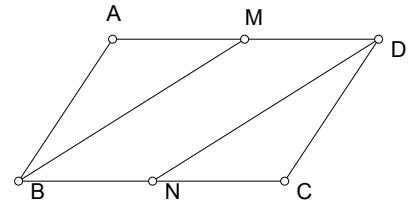
1.8. a) Ta có  $\overline{NA} + \overline{AD} = \overline{ND}$

Tứ giác MBND là hình bình hành nên :  $\overline{MB} = \overline{DN} = -\overline{ND}$

Vậy  $\overline{AD} + \overline{MB} + \overline{NA} = \vec{0}$

b) Ta có  $\overline{CD} - \overline{CA} = \overline{AD}$  mà  $\overline{AD} = -\overline{CB}$

Vậy  $\overline{CD} - \overline{CA} + \overline{CB} = \vec{0}$



1.9. a) Từ điểm A kẻ  $\overline{AB} = \vec{a}$  và  $\overline{BC} = \vec{b}$  thì ta có :

$$\vec{a} + \vec{b} = \overline{AC} . \text{ Do đó } |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow |\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$$

hay  $AC = AB + BC$  .Điều này xảy ra khi A, B, C thẳng hàng theo thứ tự này . Vậy hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng

b) Từ điểm A kẻ  $\overline{AB} = \vec{a}$  và  $\overline{AD} = \vec{b}$  và xét hình bình hành ABCD

Theo qui tắc hình bình hành ta có :  $\vec{a} + \vec{b} = \overline{AC}$

Theo qui tắc hiệu vectơ ta có :  $\vec{a} - \vec{b} = \overline{DB}$

Do đó  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow |\overline{AC}| = |\overline{DB}|$  hay  $AC = BD$

Điều này xảy ra khi ABCD là hình chữ nhật. Vậy AC vuông góc với BD hay hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc.

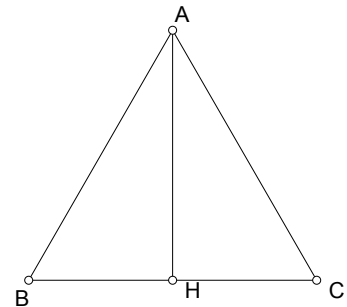
1.10.

a) Ta có  $\overline{AB} + \overline{BH} = \overline{AH}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên đường cao

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy độ dài  $(\overline{AB} + \overline{BH})$  bằng  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



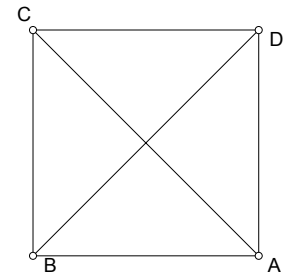
b) Ta có  $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$

Vậy độ dài  $(\overline{AB} - \overline{AC})$  bằng  $BC = a$

c) Vẽ hình bình hành ABDC thì ta có  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$

Mà  $AD = 2AH = \sqrt{3}$

Vậy độ dài  $(\overline{AB} + \overline{AC})$  bằng  $AD = \sqrt{3}$



1.11. Tam giác ABC cân tại A.

1.12. a) Ta có  $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$  . Vậy độ dài  $(\overline{AC} - \overline{AB})$  bằng  $BC = a$

b) Ta có  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$

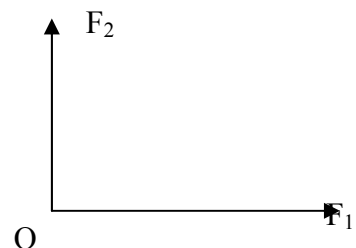
Vậy độ dài  $(\overline{AB} + \overline{AD})$  bằng  $AC = a\sqrt{2}$

c) Ta có :  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  . Vậy độ dài  $(\overline{AB} + \overline{BC})$  bằng  $AC = a\sqrt{2}$

1.13. Vectơ hợp lực là tổng của hai vectơ  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

$F_1$  vuông góc với  $F_2$  nên vectơ tổng là đường chéo của hình chữ nhật

$OF_1RF_2$  . Ta có  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overline{OR}$

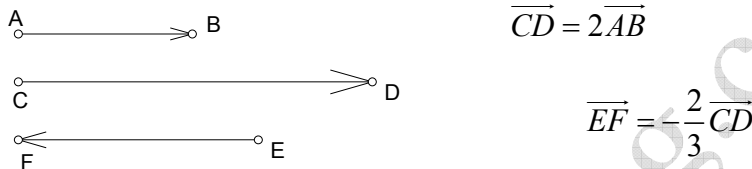


Mà  $OR = F_1F_2 = \sqrt{60^2 + 80^2} = 10\sqrt{10}$

### §3. Tích vector với một số

#### A. Tóm tắt giáo khoa :

1. **Định nghĩa** : Tích của vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với số thực  $k \neq 0$  là một vector, ký hiệu là  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$



Ta qui ước  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  và  $k\vec{0} = \vec{0}$

2. **Tính chất** : Với mọi vector  $\vec{a}, \vec{b}$  và mọi số thực  $k, l$  ta có :

a)  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

b)  $(k + l) \cdot \vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

c)  $k(l\vec{a}) = (k \cdot l) \vec{a}$

d)  $1\vec{a} = \vec{a}$  ;  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$  ;  $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$  hay  $\vec{a} = \vec{0}$

3. **Điều kiện để hai vector cùng phương** :

Điều kiện cần và đủ để hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương là có một số thực  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$

4. **Điều kiện để ba điểm thẳng hàng** :

Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là có số thực  $k$  sao cho  $\vec{AB} = k\vec{AC}$

#### B. Giải toán :

##### **Dạng 1: CM một đẳng thức vector**

**Ví dụ 1** : Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta luôn có :

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$$

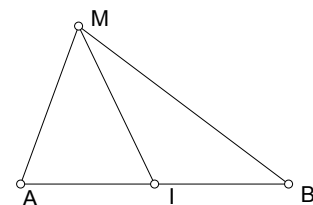
**Giải**

Theo qui tắc ba điểm ta có :  $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$  và  $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB}$

Do đó :  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} + \vec{IA} + \vec{IB}$

Mà  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$  vì I là trung điểm của AB

Vậy  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$



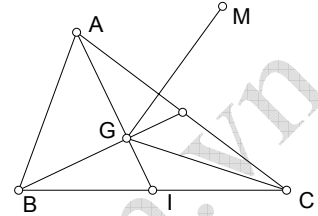
**Ví dụ 2** : Cho tam giác ABC, trọng tâm G .

- a) Chứng minh rằng  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$   
 b) Chứng minh rằng  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$  với mọi điểm M tùy ý

**Giải**

a) Gọi I là trung điểm của BC ta có :  $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$  (theo bài 1)  
 mà  $\vec{GA} = -2\vec{GI}$  (tính chất trọng tâm)  
 Vậy  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

b) Theo qui tắc ba điểm thì với mọi điểm M ta có :  $\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA}$  ;  $\vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GB}$  ;  $\vec{MC} = \vec{MG} + \vec{GC}$   
 Vậy  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{MG}$   
 ( vì theo câu a ta có  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  ).



**Ví dụ 3 :** Cho tam giác ABC. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn AB, BC và CA sao cho  $AM = \frac{1}{3} AB$  ,  $BN = \frac{1}{3} BC$  ;  $CP = \frac{1}{3} CA$ .  
 Chứng minh :  $\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$

**Giải**

Ta có :

$$\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AN} - \vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{BC} \quad (1)$$

$$\vec{CP} = \frac{1}{3}\vec{CA} \Leftrightarrow \vec{BP} - \vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{CA} \quad (2)$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{CM} - \vec{CA} = \frac{1}{3}\vec{AB} \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được :

$$\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} - (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})$$

Mà  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$  . Vậy  $\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$

**Dạng 2: CM 3 điểm A, B, C thẳng hàng.**

Ta chứng minh  $\vec{AB} = k.\vec{AC}$

**Ví dụ 4.** Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  thỏa  $\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} & (1) \\ 2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c} = \vec{0} & (2) \end{cases}$   
 Chứng minh  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c}$

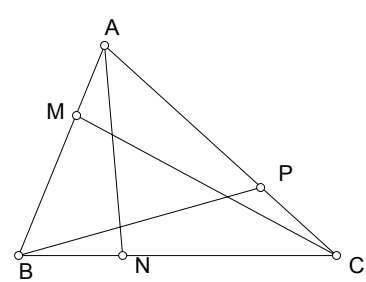
**Giải**

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được :

$$3\vec{a} + 5\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{5}{3}\vec{c} \text{ Vậy } \vec{a} \text{ cùng phương với } \vec{c}$$

Từ (1) suy ra :  $\vec{b} = -\vec{a} - \vec{c} = \frac{5}{3}\vec{c} - \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{c}$  Vậy  $\vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c}$

**Ví dụ 5.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi I là trung điểm của CD. Lấy điểm M trên đoạn BI sao



cho  $BM = 2MI$ . Chứng minh ba điểm A, M, C thẳng hàng.

**Giải**

Theo giả thiết ta có :  $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MI}$

Do đó theo qui tắc hiệu vectơ ta có :

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM}). \text{ Suy ra 3}$$

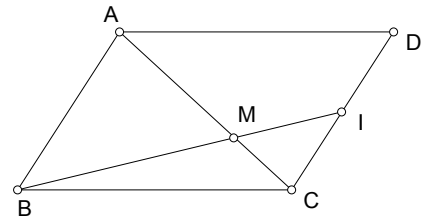
$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB}$$

Mà theo qui tắc I là trung điểm của CD nên ta có :

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Vậy } 3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$$

Hệ thức này chứng tỏ A, M, C thẳng hàng



**\* Ví dụ 6** .Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O .

a) Chứng minh tứ giác BHCD là hình bình hành. Suy ra :

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

b) Chứng minh  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

Chứng minh ba điểm O, G, H thẳng hàng với G là trọng tâm của tam giác ABC.

**Giải**

a) Ta có :  $BH \perp AC$  ( vì H là trực tâm)

$DC \perp AC$  ( vì AD là đường kính)

Do đó  $BH \parallel DC$  ( vì cùng  $\perp$  với AC)

Tương tự  $CH \parallel BD$  vì cùng  $\perp$  với AB

Vậy tứ giác BHCD là hình bình hành

Theo qui tắc hình bình hành ta có :

$$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$$

BC và HD là hai đường chéo của hình bình hành nên giao nhau tại trung điểm M

Trong tam giác AHD , O là trung điểm của AD nên ta có :

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$$

b) Theo qui tắc ba điểm ta có :

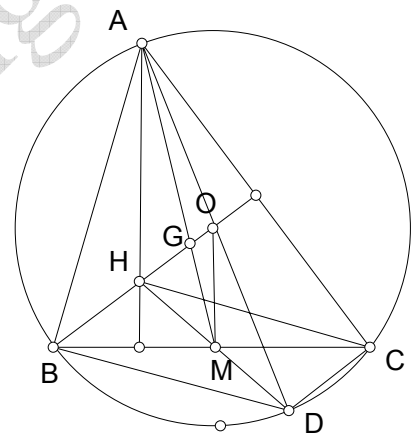
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}; \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH} \quad (1) \text{ vì } \overrightarrow{HO} = -\overrightarrow{OH}$$

c) G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có :  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$  (2)

So sánh (1) và (2) ta có :  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

Vậy ba điểm O, G, H thẳng hàng ( gọi là đường thẳng OIe)



**\* Ví dụ 7** : Cho tam giác ABC và I là trung điểm của BC. Tìm tập hợp các

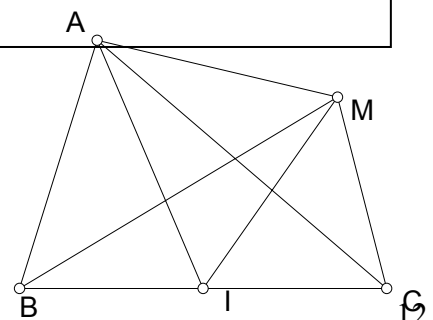
điểm M thỏa :  $|2\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$

**Giải**

I là trung điểm của BC nên ta có :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$$

$$\text{Do đó } |2\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$$



$$\Leftrightarrow |2\overline{MA}| = |2\overline{MI}| \Leftrightarrow MA = MI$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của AI

**\* Ví dụ 8 :** Tìm điểm C trên đoạn AB sao cho :  $\overline{CA} - 2\overline{CB} = \vec{0}$ .

Cho điểm M bất kỳ trong mặt phẳng và gọi MN là vectơ định bởi :  $\overline{MN} = \overline{MA} - 2\overline{MB}$  . Chứng tỏ đường thẳng MN qua một điểm cố định.

**Giải**

$$\text{Ta có } \overline{CA} = 2\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} + \overline{BA} = 2\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{BA} = \overline{CB}$$

Do đó B là trung điểm của AC

$$\text{Ta có : } \overline{MN} = \overline{MA} - 2\overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CA} - 2(\overline{MC} + \overline{CB}) = -\overline{MC} \text{ vì } \overline{CA} - 2\overline{CB} = \vec{0}$$

Vậy M , N , C thẳng hàng. Suy ra đường thẳng MN qua điểm cố định C

**\* Ví dụ 9 :** Cho tam giác ABC. Gọi B là điểm định bởi  $\overline{BD} = \frac{2}{3}\overline{BC}$  và I là trung điểm của AD. Gọi

M là điểm thỏa  $\overline{AM} = x\overline{AC}$  với x là số thực

a) Tính  $\overline{BI}$  theo  $\overline{BA}$  và  $\overline{BC}$

b) Tính  $\overline{BM}$  theo  $\overline{BA}$  và  $\overline{BC}$

c) Tính x để ba điểm B, I, M thẳng hàng

**Giải**

a) I là trung điểm của AD nên ta có :

$$\overline{BI} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BD}) = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \frac{2}{3}\overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC}$$

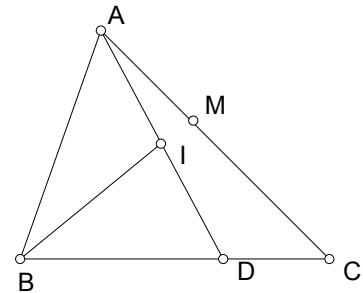
$$\text{b) Ta có : } \overline{AM} = x\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{BM} - \overline{BA} = x(\overline{BC} - \overline{BA})$$

$$\text{Do đó : } \overline{BM} = (1-x)\overline{BA} + x\overline{BC}$$

c) Ba điểm B, I, M thẳng hàng khi có một số k sao cho :

$$\overline{BM} = k\overline{BI} \Leftrightarrow (1-x)\overline{BA} + x\overline{BC} = \frac{k}{2}\overline{BA} + \frac{k}{3}\overline{BC}$$

$$\text{Do đó : } 2(1-x) = 3x \text{ Vậy } x = \frac{2}{5}$$



**C. Bài tập rèn luyện :**

1.14 Cho hình bình hành ABCD tâm O và gọi G là trọng tâm tam giác ABC

a) Chứng minh rằng :  $\overline{AB} + \overline{AC} = 3\overline{AG}$  và  $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = 4\overline{AO}$

b) Cho M là điểm tùy ý, chứng minh :  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 4\overline{MO}$

1.15. Cho tứ giác ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD

Chứng minh rằng :  $\overline{AB} + \overline{CD} = 2\overline{MN}$

1.16 . Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và A'B'C'.

Chứng minh :  $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\overline{GG'}$

1.17. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của AG.

Chứng minh :  $\overline{AB} + \overline{AC} + 6\overline{GI} = \vec{0}$

\*1,18. Cho tam giác ABC có AB = 3 và AC = 4. Gọi AD là phân giác trong của góc A. Tính  $\overline{AD}$  theo  $\overline{AB}$  và  $\overline{AC}$

\*1.19. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và điểm H định bởi :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC

(Hướng dẫn : Chứng minh  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$  với M là trung điểm của BC )

1.20 . Cho tam giác ABC trọng tâm G. Tính  $\overrightarrow{AB}$  theo  $\overrightarrow{GB}$  và  $\overrightarrow{GC}$

1.21 : Cho tam giác ABC trọng tâm G và I là trung điểm của AG .Kây điểm K trên đoạn AC .Tính  $\overrightarrow{AK}$  theo  $\overrightarrow{AC}$  để ba điểm B, I, K thẳng hàng

\*1.22. Cho tam giác ABC

a) Xác định điểm D thỏa  $\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

b) Tìm tập hợp các điểm M thỏa  $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = 8$

\*1.23. Cho tam giác ABC.

a) Xác định điểm D thỏa  $\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$  .Cho M là điểm bất kỳ và

b)  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$  .Chứng minh đường thẳng MN qua điểm cố định

### D.Hướng dẫn giải

1.14 Gọi E là trung điểm của AC ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} \text{ mà } \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$$

Theo qui tắc hình bình hành ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \text{ Do đó } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AO}$$

1.15 :

N là trung điểm của BD nên ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$$

M là trung điểm của AC nên ta có :

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}$$

1.16 Theo qui tắc hiệu hai vectơ ta có :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA} ; \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GB'} - \overrightarrow{GB} ; \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{GC'} - \overrightarrow{GC}$$

$$\text{Do đó : } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

Mà G là trọng tâm tam giác ABC nên  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

và G' là trọng tâm tam giác A'B'C' nên ta có :

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 3\overrightarrow{GG'}$$
 ( bài 2b của giải toán)

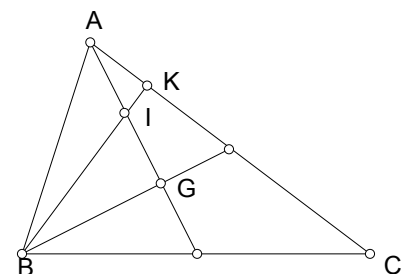
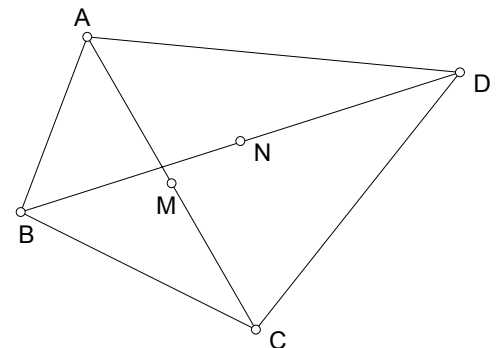
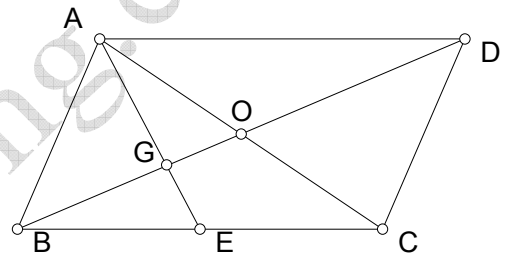
toán)

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

1.17. Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG}$  ( M là trung điểm của BC)

I là trung điểm của AG nên  $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{GI}$

$$\text{Vậy : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{GI} = \vec{0}$$

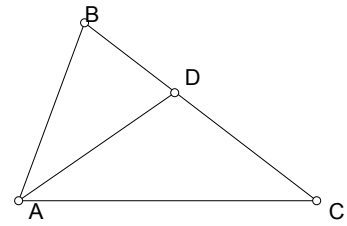


\*1.18. Theo tính chất đường phân giác trong của góc A trong tam giác ABC ta có :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

Do đó  $3DC = 4DB$  mà hai vectơ  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  ngược hướng nên ta có :  $3\overrightarrow{DC} = -4\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = -4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$



1.19. Xem bài 6 trong phần giải toán

1.20. G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

\*1.21. I là trung điểm của AG nên

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BI}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$$

Đặt  $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AC}$  thì ta có :

$$\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BA} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = (1-x)\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC}$$

Vậy B, I, K thẳng hàng khi có một số k sao cho  $\overrightarrow{BK} = k\overrightarrow{BI}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(1-x) = 6x \quad \Leftrightarrow 15x = 3 \quad \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

\*1.22 .a) Ta có :  $\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -3\overrightarrow{DB}$

Vậy D chia đoạn AB theo tỉ số -3

b) Ta có :  $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = 8 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})| = 8$

$$\Leftrightarrow |4\overrightarrow{MD}| = 8 \quad \Leftrightarrow DM = 2$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm D bán kính bằng 2

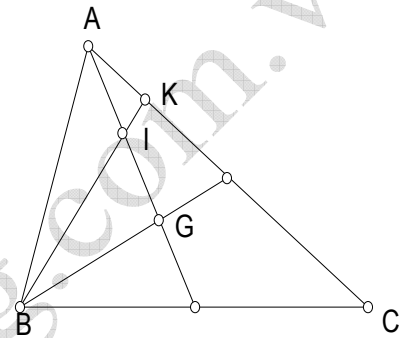
\* 1.23 Ta có :  $\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DC}$

Vậy điểm D chia đoạn BC theo tỉ số 3

Ta có :  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} - 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MD}$$

Vậy đường thẳng MN qua điểm D cố định



## §4. Trục tọa độ

### A. Tóm tắt giáo khoa

#### 1. Định nghĩa :

Trục tọa độ (còn gọi là trục hay trục số) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ  $\vec{i}$  có độ dài bằng 1



Điểm O là gốc tọa độ và vectơ  $\vec{i}$  là vectơ đơn vị của trục

Ký hiệu : trục  $(O; \vec{i})$  hay trục  $x'Ox$

2. **Tọa độ** của điểm , của vectơ trên trục tọa độ :

\* Cho điểm M trên trục  $(O; \vec{i})$  thì có số m xác định để  $\overline{OM} = m\vec{i}$  .Số m gọi là tọa độ điểm M trên trục

\* Cho vectơ  $\vec{a}$  cùng phương với trục  $(O; \vec{i})$  thì tồn tại duy nhất một số thực t sao cho  $\vec{a} = t\vec{i}$  .

Số t gọi là tọa độ của vectơ  $\vec{a}$  . Như vậy tọa độ của điểm M là tọa độ của vectơ  $\overline{OM}$

3. **Độ dài đại số** : Cho hai điểm A và B nằm trên trục Ox thì tọa độ của vectơ  $\overline{AB}$  gọi là độ dài đại số của vectơ  $\overline{AB}$  trên trục. Ký hiệu :  $\overline{AB}$

Như vậy :  $\overline{AB} = \overline{AB} \vec{i}$

4. Trên trục  $(O; \vec{i})$  cho hai điểm A và B lần lượt có tọa độ a và b thì **độ dài đại số** của  $\overline{AB}$  là :  $\overline{AB} = b - a$

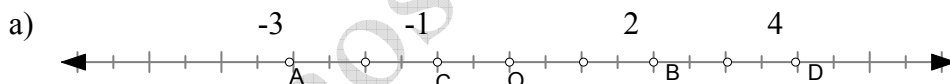
5. **Hệ thức Sa-lơ** : Cho ba điểm A, B, C tùy ý trên trục  $(O; \vec{i})$  thì ta có :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

**B. Giải toán**

**Ví dụ 1.** Trên một trục Ox cho các điểm A,B,C,D lần lượt có tọa độ là -3 ; 2 ; -1 , 4  
 a) Hãy biểu diễn các điểm này trên trục  
 b) Tính độ dài đại số của các vectơ :  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{CD}$

**Giải**



Ta có  $\overline{OA} = -3, \overline{OB} = 2, \overline{OC} = -1, \overline{OD} = 4$

b) Ta có :  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2 - (-3) = 5$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = -1 - (-3) = 2$  và  $\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = 4 - (-1) = 5$

**Ví dụ 2.** Trên trục  $(O; \vec{i})$  cho hai điểm A và B với  $\overline{OA} = -2\vec{i}; \overline{OB} = 4\vec{i}$  . Tính tọa độ trung điểm M của đoạn AB

**Giải**

M là trung điểm của AB nên ta có :

$$2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} = -2\vec{i} + 4\vec{i} = 2\vec{i} \Leftrightarrow \overline{OM} = \vec{i}$$

Vậy tọa độ của M là 1

Cách khác : M là trung điểm của AB nên  $\overline{AM} = \overline{MB} \Leftrightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$

$$\Leftrightarrow 2x_M = x_A + x_B \Leftrightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

**\*Ví dụ 3.** Trên trục Ox cho 4 điểm A, B, C, D lần lượt có tọa độ a . b . c . d và thỏa hệ thức :



$\overline{AC.BD} + \overline{AD.BC} = 0$ . Tìm hệ thức giữa a, b, c, d

**Giải** Theo công thức tính độ dài đại số của vectơ theo tọa độ ta có :

$$\overline{AC.BD} + \overline{AD.BC} = 0 \Leftrightarrow (c - a)(d - b) + (d - a)(c - b) = 0$$

hay :  $2(ab + cd) = ac + ad + bc + bd$

Vậy  $(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$

**C. Bài tập rèn luyện :**

1.24 Trên trục  $(O; \vec{i})$  cho ba điểm A, B, C lần lượt có tọa độ 2 ; 5 ; -1. Tìm tọa độ của điểm M trên trục sao cho :  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$

1.25 . Trên trục  $(O; \vec{i})$  cho hai điểm A và B lần lượt có tọa độ a và b.

a) Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn AB

b) Tìm tọa độ điểm C trên trục sao cho  $\overline{CA} = -2\overline{CB}$

\*1.26. Cho trên trục  $(O; \vec{i})$  ba điểm A, B, C lần lượt có tọa độ -2 ; 2 ; 3. Tìm tọa độ điểm M trên trục sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất

\*1.27 . Cho trên trục Ox bốn điểm A, B, C, D thỏa  $\overline{AC.BD} + \overline{AD.BC} = 0$ . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + CD^2 = 4IJ^2$$

**D. Hướng dẫn giải**

1.24. Ta có :  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{OA} - \overline{OM} + \overline{OB} - \overline{OM} = \vec{0}$

$$3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 2\vec{i} + 5\vec{i} - \vec{i} = 6\vec{i}$$

Do đó  $\overline{OM} = 2\vec{i}$  Vậy tọa độ của M trên trục là 2

1.25. a) Ta có :  $2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} = a\vec{i} + b\vec{i} = (a + b)\vec{i}$

Do đó  $\overline{OM} = \frac{1}{2}(a + b)\vec{i}$  Vậy tọa độ của M trên trục là  $\frac{1}{2}(a + b)$

b) Ta có :  $\overline{CA} = -2\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{OA} - \overline{OC} = -2(\overline{OB} - \overline{OC}) \Leftrightarrow 3\overline{OC} = \overline{OA} + 2\overline{OB}$

Do đó  $3\overline{OC} = a\vec{i} + 2b\vec{i} = (a + 2b)\vec{i}$

Vậy tọa độ của C trên trục là  $\frac{a + 2b}{3}$

\*1.26. Gọi x là tọa độ của M trên trục thì ta có :

$$\overline{MA} = (-2 - x) \quad ; \quad \overline{MB} = (2 - x) \quad ; \quad \overline{MC} = (3 - x)$$

$$\text{Do đó } MA^2 + MB^2 + MC^2 = (-2 - x)^2 + (2 - x)^2 + (3 - x)^2 = 4 + 4x + x^2 + 4 - 4x + x^2 + 9$$

$$- 6x + x^2$$

$$= 3x^2 - 6x + 17 = 3(x^2 - 2x) + 17$$

$$= 3(x - 1)^2 + 14 \geq 14$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x - 1 = 0$  hay  $x = 1$

Vậy  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng 14 khi  $x = 1$

\*1.27 .Gọi a, b, c, d lần lượt là tọa độ của A, B, C, D trên trục Ox.

I là trung điểm của AB nên ta có :  $x_i = \frac{a + b}{2}$

J là trung điểm của CD nên ta có :  $x_j = \frac{c+d}{2}$

Do đó :  $\overline{IJ}^2 = (x_j - x_i)^2 = \left(\frac{c+d}{2} - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[(c+d)^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)(c+d)]$

mà theo giả thiết  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$

Vậy  $4IJ^2 = [(a+b)^2 + (c+d)^2 - 4(ab+cd)] = (b-a)^2 + (c-d)^2 = AB^2 + CD^2$

## § 5 . Hệ trục tọa độ

### A. Tóm tắt giáo khoa

1. **Định nghĩa** : Hệ trục tọa độ vuông góc gồm hai trục Ox và Oy vuông góc với nhau.

Vector đơn vị trên trục Ox là  $\vec{i}$  và trên trục Oy là  $\vec{j}$

Điểm O là gốc tọa độ .

Trục Ox là trục hoành và trục Oy là trục tung

Ký hiệu Oxy hay  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

2. **Tọa độ của vector , của điểm** :

\* Trong hệ trục tọa độ vuông góc  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  nếu

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  thì cặp số  $(x; y)$

được gọi là tọa độ của vector  $\vec{u}$  .

Ký hiệu  $\vec{u} = (x ; y)$  hay  $\vec{u}(x; y)$  . số thứ nhất x là hoành độ và số thứ hai y

là tung độ của vector  $\vec{u}$

\* Trong hệ trục tọa độ  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  , tọa độ của vector

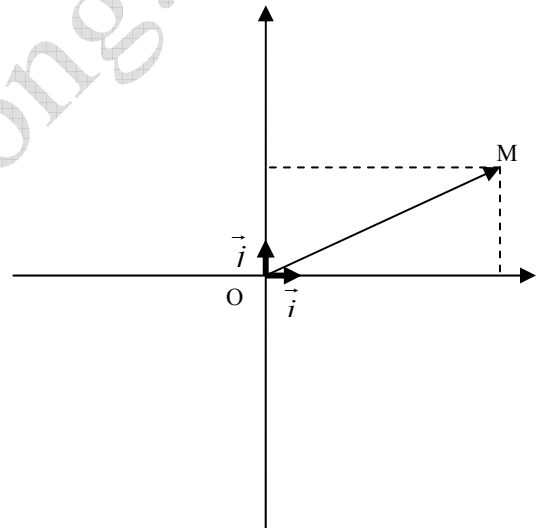
$\overline{OM}$  gọi là tọa độ của điểm

M. Ký hiệu  $M(x; y)$  với x là hoành độ và y là tung độ của điểm M

Nhận xét : Gọi H và K là hình chiếu của M lên Ox và Oy thì :

$$M(x; y) \Leftrightarrow \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overline{OH} + \overline{OK}$$

Như vậy  $\overline{OH} = x\vec{i}$  hay  $x = \overline{OH}$  và  $\overline{OK} = y\vec{j}$  hay  $y = \overline{OK}$



3. **Biểu thức tọa độ của các phép toán vector**:

Cho  $\vec{u} = (x; y)$  và  $\vec{v} = (x'; y')$  thì ta có :

1)  $\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

2)  $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$

3)  $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$

4)  $k\vec{u} = (kx; ky)$  với  $k \in \mathbb{R}$

5)  $\vec{u} = (x; y)$  và  $\vec{v} = (x'; y')$  cùng phương  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$  hay  $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$   
 với  $x' \neq 0$  và  $y' \neq 0$  hay  $xy' - yx' = 0$

6) Cho hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  thì :  
 tọa độ  $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$   
 Độ dài đoạn  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

**B. Giải toán**

**Dạng : Tìm tọa độ điểm M**

Cách 1: Tìm đặc tính vector của điểm M, từ đó sử dụng công thức (1), (2), (3), (4).

Cách 2: Thiết lập phương trình hay hệ phương trình giữa tọa độ điểm M dựa vào đặc tính của điểm

M. Các công thức (5), (6) về điều kiện cùng phương hai vector, công thức khoảng cách hai điểm... là các phương trình cần thiết lập.

**Ví dụ 1 :** Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$ .  
 Tính tọa độ điểm M của đoạn AB

**Giải**

M là trung điểm của AB nên ta có :

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}(x_A + x_B)\vec{i} + \frac{1}{2}(y_A + y_B)\vec{j}$$

Vậy tọa độ của M là  $(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$

Cách khác: Ta có  $\vec{AM} = \vec{MB}$

Mà  $\vec{AM} = (x_M - x_A; y_M - y_A)$  và  $\vec{MB} = (x_B - x_M; y_B - y_M)$

Do đó  $\vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_A = x_B - x_M \\ y_M - y_A = y_B - y_M \end{cases}$  Vậy  $M(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$  (\*)

(\*) là công thức tọa độ trung điểm cần nhớ.

**Ví dụ 2 :** Cho tam giác ABC biết  $A(x_A; y_A)$  ;  $B(x_B; y_B)$  và  $C(x_C; y_C)$ . Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

**Giải**

Theo tính chất trọng tâm ta có :  $3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases}$$

Vậy tọa độ trọng tâm G (  $\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$  ) (\*)

(\*) là công thức tọa độ trọng tâm cần nhớ.

**Ví dụ 3 :** Cho A(1; 4) , B(-2 ; 2) và C(4; 0)

- a) Chứng minh A , B , C là ba đỉnh của tam giác
- b) Tính tọa độ vectơ trung tuyến  $\overline{AM}$  kẻ từ A
- c) Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

**Giải**

a) Ta có :  $\overline{AB} = (-3; -2)$  và  $\overline{AC} = (3; -4)$ .

Ta thấy  $\frac{-3}{3} \neq \frac{-2}{-4}$  nên  $\overline{AB}$  và  $\overline{AC}$  không cùng phương

Suy ra A,B,C không thẳng hàng và chúng tạo thành một tam giác

b) Tọa độ trung điểm M của BC là M( 1; 1)

Vậy :  $\overline{AM} = (1 + 2 ; 1 - 2) = (3 ; -1)$

c) Tọa độ trọng tâm G (  $\frac{1-2+4}{3}; \frac{4+2+0}{3}$  ) hay G(1; 2)

**Ví dụ 4.** Cho hai điểm A(x<sub>A</sub>;y<sub>A</sub>) và B(x<sub>B</sub>; y<sub>B</sub>)..Tìm tọa độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k ≠ 1

**Giải**

M chia đoạn AB theo tỉ số k ⇔  $\overline{MA} = k\overline{MB}$  với k ≠ 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \end{cases} \text{ Vậy } \begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}$$

**\*Ví dụ 5.** Cho vectơ  $\vec{a} = (2m + 1; 3m - 2)$  và  $\vec{b} = (2; 1)$

- a) Tìm m để  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{b}$
- b) Tìm tọa độ của vectơ có độ dài bằng 1 cùng phương với  $\vec{b}$

**Giải**

a)  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{b}$  khi ta có :  $1(2m + 1) - 2(3m - 2) = 0$

Vậy m =  $\frac{5}{4}$

b) Gọi (x ; y) là tọa độ vectơ đơn vị  $\vec{i}$  cùng phương với  $\vec{b}$  thì ta có

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ Giải hệ này ta được } x = 1, y = \frac{1}{2} \text{ hay } x = -1, y = -\frac{1}{2}$$

**\*Ví dụ 6 .** Cho điểm A(-2; 1) , B (-4; 5)

- a) Tìm M trên trục Ox sao cho A,B,M thẳng hàng
- b) Tìm N trên trục Ox sao cho ABNO là hình thang cạnh đáy AO
- c) Tìm giao điểm I của hai đường chéo hình thang

**Giải**

M thuộc trục Ox có tọa độ  $(x; 0)$

Ta có :  $\overrightarrow{AM} = (x+2; -1)$  và  $\overrightarrow{AB} = (-2; 4)$

A, B, M thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương

$$\Leftrightarrow 4(x+2) - (-1)(-2) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

b) Hình thang ABNO cạnh đáy AO thì AO//BN

N(x;0) thuộc Ox, ta có :  $\overrightarrow{BN} = (x+4; -5)$  và  $\overrightarrow{AO} = (2; -1)$

BN//AO  $\Leftrightarrow -1(x+4) - 2(-5) = 0 \Leftrightarrow x = 6$  Vậy N(6; 0)

I(x; y) là giao điểm của hai đường chéo OB và AN

Ta có : O, I, B thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}$  và  $\overrightarrow{OB}$  cùng phương

$$\Leftrightarrow 5x + 4y = 0$$

và A, I, N thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = (x+2; y-1)$  và  $\overrightarrow{AN} = (8; -1)$  cùng phương

$$\Leftrightarrow -1(x+2) - 8(y-1) = 0$$

Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ x + 8y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}; y = \frac{5}{6}$$

**Ví dụ 7.** Cho tam giác ABC với A(5; 5), B(6; -2), C(-2; 4)  
 Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm E của hình bình hành

**Giải**

ABCD là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

Ta có  $\overrightarrow{CD} = (x_D + 2; y_D - 4)$  và  $\overrightarrow{BA} = (-1; 7)$

Do đó  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -1 \\ y_D - 4 = 7 \end{cases}$  Vậy D(-3; 11)

**\*Ví dụ 8 :** Cho tam giác ABC với AB = 5 và AC = 1. Tính tọa độ chân D của phân giác trong góc A theo tọa độ của B và C

**Giải**

Theo tính chất của đường phân giác ta có :  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{1}$

Vậy  $\overrightarrow{DB} = -5\overrightarrow{DC}$  vì  $\overrightarrow{DB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  ngược hướng

Ta có :  $\overrightarrow{DB} = -5\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_D = -5(x_C - x_D) \\ y_B - y_D = -5(y_C - y_D) \end{cases}$

Giải hệ ta được :  $x_D = \frac{x_B + 5x_C}{6}$  và  $y_D = \frac{y_B + 5y_C}{6}$

**\*Ví dụ 9 :** Cho hai điểm A(4; 3) và B(2; -1). Tìm điểm M trên trục hoành sao cho :  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$  đạt giá trị nhỏ nhất

**Giải**

Ta có :  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$  với I là trung điểm của AB

Do đó :  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2MI = 2$  với I(3; 1)

và  $MI = \sqrt{(x-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + 1} \geq 1$  với I(x; 0) thuộc trục hoành

Vậy  $|\overline{MA} + \overline{MB}|$  đạt giá trị nhỏ nhất = 1 khi  $x - 3 = 0$  hay  $x = 3$

**Ví dụ 10.** Cho  $\vec{a}=(1; 2)$  ;  $\vec{b}=(-3; 1)$  và  $\vec{c}=(6; 5)$  .Tính m để vectơ  $m\vec{a} + \vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c}$  .

**Giải**

Ta có :  $m\vec{a} + \vec{b} = (m - 3 ; 2m + 1)$

Do đó  $m\vec{a} + \vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c}=(6; 5) \Leftrightarrow \frac{m-3}{6} = \frac{2m+1}{5}$

$$\Leftrightarrow 5m - 15 = 12m + 6 \Leftrightarrow 7m = -21 \Leftrightarrow m = -3$$

### C.Bài tập rèn luyện :

1.28 Cho hai vectơ  $\vec{a}=(2; 4)$  ;  $\vec{b} = (-6 ; 10)$

Tính tọa độ và độ dài các vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$  và  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{i}$

1.29 . Cho A(-4; 2) ; B(6; -4) ; C(0; -6)

a) Tính tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành và tọa độ tâm hình bình hành này

b) Gọi M là trung điểm của BC, Tính tọa độ điểm G sao cho  $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM}$

1.30. Cho  $\vec{a} = (2m; 3m + 1)$  và  $\vec{b} = (-4 ; -8)$ .

a) Tính m để  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương

b) Tính tọa độ của vectơ  $\vec{u}$  có độ dài bằng 1 và cùng phương với  $\vec{b}$

1.31 .Cho tam giác ABC với A(2; 3) ; B(-1 ; -1) và C(6; 0)

a) Tính AB,BC và CA .Suy ra tam giác ABC vuông cân

b) Tính diện tích tam giác ABC và đường cao AH

1.32. Cho ba điểm A(-1; 1) ; B(0; 2) và C(3; 1)

a) Chứng tỏ A,B,C không thẳng hàng

b) Tính tọa độ đỉnh D để ABCD là hình thang cân cạnh đáy AB

1.33. Cho bốn điểm A(-1; 1) ; B(3; 3) ; C(1; -1) và D(-3; -3)

Tứ giác ABCD là hình gì?

1.34. Cho tam giác ABC biết A(2; -2) ; B(10,-6) ; C ở trên trục Oy và trọng tâm G ở trên trục Ox.Tìm tọa độ của C và G.

\*1.35 .Cho A(1; 2) ; B(-2; 3) ; C(2 ; -1) .Tìm m sao cho  $|\overline{AB} + m\overline{AC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất

\* 1.36 : Cho tam giác ABC với A(1; 2) ; B(2; 5) và C(4; -1).Tính tọa độ chân D của phân giác trong AD

\*1.37 Trong hệ trục Oxy cho điểm A(-1; 2) và B(4; 5) .

a) Tính tọa độ của điểm A' đối xứng của A qua Ox.

b) Tìm tọa độ của M trên Ox sao cho A',M ,B thẳng hàng.Tính A'B

\*1.38 : Cho tam giác ABC.gọi D là trung điểm của BC, N là điểm đối xứng của C qua A và M là điểm thỏa  $\overline{AM} = -\frac{1}{2}\overline{AB}$  .Tìm điểm K trên đường thẳng MN sao cho A, D , K thẳng hàng

### D. Hướng dẫn giải

1.28 . Cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 4)$  ;  $\vec{b} = (-6 ; 10)$  ta có :  $2\vec{a} = (4; 8)$  và  $\frac{-1}{2}\vec{b} = (-3; 5)$

Do đó :  $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = (4 - 3 ; 8 - 5) = (1 ; 3)$

Ta có  $\frac{1}{2}\vec{a} = (1; 2)$  và  $-3\vec{i} = (-3 ; 0)$  Vậy  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{i} = (1-6 -3 ; 2 + 10) = (-8; 12)$

1.29 : a) ABCD là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overline{CD} = \overline{BA}$  .Gọi D(x ; y) ta có :

$$\overline{CD} = (x - 0; y + 6) \text{ và } \overline{BA} = (6 + 4 ; -4 - 2) = (10; -6)$$

$$\text{Do đó : } \overline{CD} = \overline{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y + 6 = -6 \end{cases} \text{ Vậy } D(10 ; -12)$$

b) M là trung điểm của BC nên tọa độ của M là M ( 3 ; -5) và  $\overline{AM} = (7; -7)$

$$\text{Do đó : } \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G + 4 = \frac{2}{3}(7) \\ y_G - 2 = \frac{2}{3}(-7) \end{cases} \text{ Vậy } x_G = \frac{2}{3} ; y_G = -\frac{8}{3}$$

1.30 : Cho  $\vec{a} = (2m; 3m + 1)$  và  $\vec{b} = (-4 ; -8)$

a)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương  $\Leftrightarrow -8(2m) = -4(3m + 1) \Leftrightarrow m = 1$

b) Gọi  $\vec{u} = (x ; y)$  có độ dài bằng 1 nên  $x^2 + y^2 = 1$  (1)

$$\vec{u} \text{ cùng phương với } \vec{b} \Leftrightarrow -8x = -4y \Leftrightarrow y = 2x$$

Thay  $y = 2x$  vào (1) ta được  $5x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}$  hay  $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$y = 2\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ hay } y = -2\frac{\sqrt{5}}{5}$$

1.31. Ta có : A(2; 3) ; B(-1 ; -1) và C(6; 0)

a)  $\overline{AB} = (-3 ; -4)$  ;  $\overline{AC} = (4; -3)$  ;  $\overline{BC} = (7; 1)$

$$AB^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow AB = 5$$

$$AC^2 = 4^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

$$BC^2 = 7^2 + 1^2 = 50 \Rightarrow BC = 5\sqrt{2}$$

Do đó  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  .Vậy tam giác ABC vuông cân tại A

b) Diện tích tam giác ABC =  $\frac{1}{2}AB.AC = \frac{25}{2}$

Mặt khác diện tích tam giác ABC =  $\frac{1}{2}BC.AH = \frac{25}{2}$

$$\text{Suy ra } AH = \frac{25}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

1.32. a) Ta có A(-1; 1) ; B( 0; 2) và C(3; 1) .Do đó  $\overline{AB} = (1; 1)$  và  $\overline{AC} = (4; 0)$

Ta thấy  $1.0 \neq 4.1$  nên A,B,C không thẳng hàng

b) ABCD là hình thang cân cạnh đáy AB thì ta có :

$$\overline{DC} \text{ cùng phương } \overline{AB} \text{ và } AD = BC$$

2  $\overline{DC}$  cùng phương  $\overline{AB} \Leftrightarrow 1(3 - x_D) - 1(1 - y_D) = 0 \Leftrightarrow y_D = x_D - 2$

$$AD^2 = (x_D + 1)^2 + (y_D - 1)^2 = BC^2 = (3)^2 + (-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_D^2 - 4x_D = 0 \Leftrightarrow x_D = 0 \text{ hay } x_D = 2 \text{ và } y_D = -2 \text{ hay } y_D = 0$$

Vậy D(0; -2) hay D(2; 0)

1.33 : Ta có : A(-1; 1) ; B(3; 3) ; C(1; -1) và D(-3; -3)

$$\overline{AB} = (4; 2) ; \overline{BC} = (-2; -4) ; \overline{AD} = (-2; -4)$$

Do đó  $\overline{BC} = \overline{AD}$  và  $AB = BC = \sqrt{20}$

Vậy ABCD là hình thoi

1.34 : C trên trục Oy nên C(0; y) và G trên trục Ox nên G(x; 0)

Tọa độ trọng tâm G cho bởi  $x = \frac{2+10+0}{3}$  và  $0 = \frac{-2-6+y}{3}$

Vậy x = 4 và y = 8 Suy ra C(0; 8) và G(4; 0)

\*1.35 : Cho A(1; 2) ; B(-2; 3) ; C(2; -1)

Do đó  $\overline{AB} = (-3; 1)$  và  $\overline{AC} = (1; -3)$  suy ra  $m \cdot \overline{AC} = (m; -3m)$

Như vậy :  $\overline{AB} + m\overline{AC} = (-3 + m; 1 - 3m)$

$$|\overline{AB} + m\overline{AC}| = \sqrt{(-3+m)^2 + (1-3m)^2} = \sqrt{10m^2 - 12m + 10}$$

Mà  $10m^2 - 12m + 10 = 10(m^2 - \frac{6}{5}m + 1) =$

$$= 10[(m - \frac{3}{5})^2 + 1 - \frac{9}{25}] = 10[(m - \frac{3}{5})^2 + \frac{16}{25}] \geq \frac{32}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $m = \frac{3}{5}$

\*1.36. Với A(1; 2) ; B(2; 5) và C(4; -1) thì  $AB^2 = (2 - 1)^2 + (5 - 2)^2 = 10$   
và  $AC^2 = (4 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 = 45$

Ta có :  $AB = \sqrt{10}$  và  $AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$  ,do đó  $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$

Theo tính chất đường phân giác thì  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$

hay  $3DB = DC$  .Suy ra  $3\overline{DB} = -\overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2 - x_D) = -(4 - x_D) \\ 3(5 - y_D) = -(-1 - y_D) \end{cases}$

Vậy  $x_D = \frac{5}{2}$  và  $y_D = \frac{7}{2}$

\*1.37 : Điểm A(-1; 2) thì đối xứng của A qua Ox là A'(-1 ; -2)

Điểm M trên Ox nên M(x ; 0)

Ta có :  $\overline{A'B} = (5 ; 7)$  và  $\overline{A'M} = (x + 1 ; 2)$

$$\overline{A'B} \text{ và } \overline{A'M} \text{ cùng phương } \Leftrightarrow 7(x + 1) - 5(2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$$

$$\text{và } A'B = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$



\*1.38 : Theo giả thiết ta có :  $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AC} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Điểm K trên MN nên ta đặt  $\overrightarrow{KM} = x\overrightarrow{KN}$   
với x là số thực, ta có :

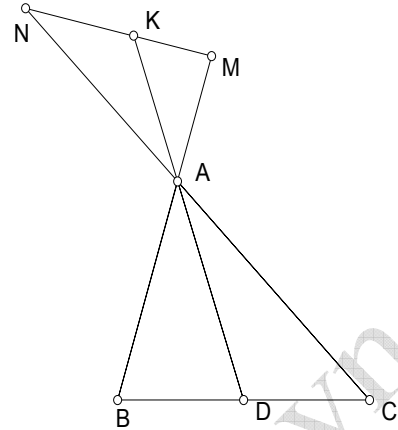
$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = x(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AK})$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \overrightarrow{AK} &= \frac{x\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}}{x-1} = \frac{-x\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}{x-1} \\ &= \frac{x}{1-x}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2(1-x)}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Ba điểm A, D, K thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AD}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{KM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KN}$$



#### §4. Trắc nghiệm cuối chương

##### A. Câu hỏi :

- Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Câu nào sau đây đúng ?
    - $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{IA}$
    - Hai vectơ  $\overrightarrow{IA}$ ,  $\overrightarrow{IB}$  đối nhau
    - $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{IA}$  là hai vectơ cùng phương
    - Cả ba câu đều đúng
  - Cho vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương và  $\vec{x} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ . Vectơ nào sau đây cùng hướng với  $\vec{x}$  ?
    - $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
    - $\vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
    - $\vec{c} = 4\vec{a} - \vec{b}$
    - $\vec{y} = -2\vec{a}$
  - Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC thì câu nào sau đây đúng?
    - $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$
    - $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$
    - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$
    - Cả ba câu đều đúng
  - Cho tam giác ABC vuông cân tại A và  $AB = a$  thì  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$  bằng bao nhiêu?
    - 0
    - $a\sqrt{2}$
    - 2a
    - đáp số khác
- Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trả lời các câu 5, 6 và 7 sau đây
- Độ dài  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  bằng bao nhiêu?
    - 2a
    - $a\sqrt{3}$
    - $a\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - đáp số khác
  - Độ dài  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  bằng bao nhiêu ?
    - a
    - 2a
    - $a\sqrt{3}$
    - $a\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - Độ dài  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$  bằng bao nhiêu?

- a) 0                                      b) 3a                                      c)  $3a\sqrt{3}$                                       d) đáp số khác
8. Cho hình bình hành ABCD tâm O và điểm M thỏa :  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$  thì :  
 a) M là trung điểm của AB                                      b) M là trung điểm của AD  
 c) M là trung điểm của OA                                      c) M là điểm tùy ý
9. Cho hình chữ nhật ABCD biết  $AB = 4a$  và  $AD = 3a$  thì độ dài  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  bằng bao nhiêu ?  
 a) 7a                                      b) 6a                                      c)  $2a\sqrt{3}$                                       d) 5a
10. Cho tam giác ABC trọng tâm G thì tập hợp các điểm M sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$  là :  
 a) Đường thẳng qua G song song với AB                                      b) Đường tròn tâm G bán kính 2  
 c) Đường tròn tâm G bán kính 6                                      d) Đáp số khác
11. Cho tam giác ABC và điểm M trên đoạn AC với  $AC = 3AM$  và ta có:  
 $\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC}$  thì  $m + n$  bằng bao nhiêu?  
 a) 1                                      b) 2                                      c)  $\frac{2}{3}$                                       d) số khác
12. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AC và N là trung điểm của BM thì  $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$  với m.n bằng bao nhiêu?  
 a) 8                                      b) 4                                      c)  $\frac{1}{8}$                                       d)  $\frac{1}{2}$
13. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm thỏa  $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BI}$  thì tập hợp các điểm M thỏa  $\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB}$  là đường nào sau đây:  
 a) Đường trung trực của AB                                      b) Đường tròn đường kính BC  
 c) Đường thẳng AB                                      d) Điểm M cố định
14. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của BC thì đẳng thức vector nào sau đây đúng?  
 a)  $2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG}$                                       b)  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$   
 c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$                                       d)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{GM}$
15. Cho tam giác ABC vuông cân tại A với  $AB = AC = a$  thì độ dài của vector  $2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$  là :  
 a) 0                                      b) a                                      c)  $a\sqrt{2}$                                       d)  $2a\sqrt{2}$
16. Cho các vector  $\vec{a} = (2; 1)$  và  $\vec{b} = (-1; 3)$ . Nếu  $\vec{c} = (m; n)$  cùng phương với  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  thì  $m + n$  bằng :  
 a) 0                                      b) 1                                      c) 2                                      d) số khác
17. Cho tam giác ABC với A(1; 1) ; B(-1; 3) ; C(-2; 0) thì tam giác ABC là tam giác gì?  
 a) vuông tại A                                      b) cân tại A                                      c) cân tại C                                      d) đều
18. Nếu ba điểm A(2; 3) ; B(3; 4) và C(m+1; -2) thẳng hàng thì m bằng  
 a) 1                                      b) 3                                      c) -2                                      d) -4
19. Cho A(-2; -1) ; B(-1; 3) ; C(m+1; n-2) Nếu  $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 0$  thì ta có hệ thức  
 a)  $2m + n - 5 = 0$                                       b)  $3m + 3n - 4 = 0$   
 c)  $2m - n + 5 = 0$                                       d)  $m + 2n - 5 = 0$



khi ta có :  $\frac{m}{7} = \frac{n}{-7}$  hay  $m = -n$  Vậy  $m + n = 0$

17c. Với  $A(1; 1)$  ;  $B(-1; 3)$  ;  $C(-2; 0)$  thì  $\overline{AB} = (-2; 2)$  ;  $\overline{AC} = (-3; -1)$  ;  
 $\overline{BC} = (-1; -3)$ . Ta thấy  $CA = CB = \sqrt{10}$

Vậy tam giác ABC cân tại C

18d. Cho ba điểm  $A(2; 3)$  ;  $B(3; 4)$  và  $C(m+1; -2)$  ta có :

$$\overline{AB} = (1; 1) \text{ và } \overline{AC} = (m-1; -5)$$

Do đó A,B,C thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overline{AB}$  và  $\overline{AC}$  cùng phương  $\Leftrightarrow m-1 = -5$

Vậy  $m = -4$

19b Cho  $A(-2; -1)$  ;  $B(-1; 3)$  ;  $C(m+1; n-2)$  thì ta có :

$$\overline{AB} = (1; 4) \text{ và } \overline{AC} = (m+3; n-1) \text{ .Do đó}$$

$$2\overline{AB} - 3\overline{AC} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1) - 3(m+3) = 0 \\ 2(4) - 3(n-1) = 0 \end{cases} \text{ Vậy } 3m = -7 \text{ và } 3n = 11$$

Suy ra  $3m + 3n - 4 = 0$

20c. Ta biết tọa độ trọng tâm của tam giác cho bởi công thức :

$$x = \frac{1-2+4}{3} = 1 \text{ và } 3 = \frac{5+1+y}{3} \text{ hay } y = 3$$

Vậy  $2x + y = 5$

www.saosangsong.com.vn