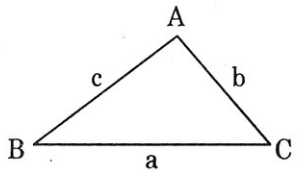
# CHƯƠNG X: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

## I. ĐỊNH LÝ HÀM SIN VÀ COSIN

Cho $\Delta ABC$ có a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện của $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$, S là diện tích $\Delta ABC$ thì

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \\ &a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}A \\ &b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}B \\ &c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 4S.\text{cotg}C \end{aligned}}$$




**<u>Bài 184</u>** Cho $\Delta ABC$. Chứng minh:
$A = 2B \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$

Ta có: $a^2 = b^2 + bc \Leftrightarrow 4R^2\sin^2 A = 4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin B.\sin C$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos 2B - \cos 2A = 2\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(B + A)\sin(B - A) = 2\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(B + A)\sin(A - B) = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin B \quad (\text{do} \ \ \sin(A + B) = \sin C > 0)$$

$$\Leftrightarrow A - B = B \vee A - B = \pi - B\,(\text{loại})$$

$$\Leftrightarrow A = 2B$$

<u>Cách khác:</u>

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B) = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A + B}{2}\sin\frac{A - B}{2}.2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2} = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(B + A)\sin(A - B) = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin B \quad (\text{do} \ \ \sin(A + B) = \sin C > 0)$$

$$\Leftrightarrow A - B = B \vee A - B = \pi - B\,(\text{loại})$$

$$\Leftrightarrow A = 2B$$

**Bài 185:** Cho $\Delta ABC$. Chứng minh: $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2}$

Ta có $\dfrac{a^2-b^2}{c^2} = \dfrac{4R^2\sin^2 A - 4R^2\sin^2 B}{4R^2\sin^2 C}$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2A) - \frac{1}{2}(1-\cos 2B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2\sin^2 C} = \frac{-2\sin(A+B)\sin(B-A)}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin^2 C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

$\left(\text{do } \sin(A+B) = \sin C > 0\right)$

**Bài 186:** Cho $\Delta ABC$ biết rằng $tg\dfrac{A}{2}\cdot tg\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Chứng minh $a+b=2c$

Ta có : $tg\dfrac{A}{2}\cdot tg\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$$\left(\text{do } \cos\frac{A}{2} > 0, \cos\frac{B}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\left[\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right] = \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} \quad (*)$$

Mặt khác: $a+b = 2R(\sin A + \sin B)$

$$= 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 8R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \quad (\text{do } (*))$$

$$= 4R\sin(A+B)$$

$$= 4R\sin C = 2c$$

Cách khác:

$a+b=2c$

$\Leftrightarrow 2R(\sin A + \sin B) = 4R\sin C$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}\ \left(\text{do}\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}\cdot\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$$

**Bài 187:** Cho $\Delta ABC$, chứng minh nếu $\text{cotgA}, \text{cotgB}, \text{cotgC}$ tạo một cấp số cộng thì $a^2, b^2, c^2$ cũng là cấp số cộng.

Ta có: $\cot gA, \cot gB, \cot gC$ là cấp số cộng $\Leftrightarrow \cot gA + \cot gC = 2\cot gB\ (*)$

**Cách 1:**

Ta có:$(*)$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C} = \dfrac{2\cos B}{\sin B} \Leftrightarrow \sin^2 B = 2\sin A\sin C\cos B$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = -\left[\cos(A+C) - \cos(A-C)\right]\left[-\cos(A+C)\right]$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos^2(A+C) - \cos(A-C)\cos(A+C)$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos^2 B - \frac{1}{2}\left[\cos 2A + \cos 2C\right]$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \left(1-\sin^2 B\right) - \frac{1}{2}\left[\left(1-2\sin^2 A\right) + \left(1-2\sin^2 C\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C$$
$$\Leftrightarrow \frac{2b^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2}$$
$$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$
$\Leftrightarrow a^2, b^2, c^2$ là cấp số cộng •

**Cách 2:**

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right).\text{cotgA}$$
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot gA$$

Do đó $\text{cotgA} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự $\text{cotgB} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \text{cotgC} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Do đó: $(*)$ $\Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = 2\cdot\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$

**Bài 188:** Cho $\Delta ABC$ có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

Chứng minh $\widehat{BAC} \le 60^0$.

Ta có: $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = \frac{2a^2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2 \, (*)$$

Do định lý hàm cosin nên ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - b^2 - c^2}{4bc} \; (\text{do } (*))$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{4bc} \ge \frac{2bc}{4bc} = \frac{1}{2} \qquad (\text{do Cauchy})$$

Vậy : $\widehat{BAC} \le 60^0$.

<u>Cách khác</u>:

định lý hàm cosin cho

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$

Do đó

$(*) \Leftrightarrow a^2 + 2bc\cos A = 2a^2$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2}{4bc} \ge \frac{1}{2} (\text{do Cauchy})$$

**Bài 189:** Cho $\Delta ABC$. Chứng minh :

$$\text{cotgA+cotgB+cotgC} = \frac{R\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{abc}$$

Ta có: $\text{cotg}A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự: $\cot gB = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \cot gC = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Do đó $\cot gA + \cot gB + \cot gC = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\dfrac{abc}{4R}}$

$$= R\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

**Bài 190:** Cho $\Delta ABC$ có 3 góc A, B, C tạo thành một cấp số nhân có công bội q = 2. Giả sử A < B < C.

Chứng minh: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

Do A, B, C là cấp số nhân có q = 2 nên B = 2A, C = 2B = 4A

$$\text{Mà } A+B+C=\pi \text{ nên } A=\frac{\pi}{7}, B=\frac{2\pi}{7}, C=\frac{4\pi}{7}$$

**Cách 1:**

Ta có: $$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R\sin B}+\frac{1}{2R\sin C}$$

$$=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}\right)$$

$$=\frac{1}{2R}\frac{\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}$$

$$=\frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{3\pi}{7}}\left(\text{do}\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2R\sin A}$$

$$=\frac{1}{a}$$

**Cách 2:**

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 4A}=\frac{\sin 4A+\sin 2A}{\sin 2A\sin 4A}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin A}=\frac{2\sin 3A.\cos A}{\sin 2A\sin 4A}=\frac{2\cos A}{\sin 2A}=\frac{2\cos A}{2\sin A\cos A}$$

$$\text{do}: \sin 3A=\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{4\pi}{7}=\sin 4A\ \bullet$$

**Bài 191:** Tính các góc của $\Delta ABC$ nếu

$$\frac{\sin A}{1}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}=\frac{\sin C}{2}$$

Do định lý hàm sin: $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

nên : $$\frac{\sin A}{1}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}=\frac{\sin C}{2}(*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R\sqrt{3}} = \frac{c}{4R}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a\sqrt{3} \\ c = 2a \end{cases}$$

Ta có: $c^2 = 4a^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2$

$$\Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2$$

Vậy $\Delta ABC$ vuông tại C

Thay $\sin C = 1$ vào $(*)$ ta được

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{1}{2} \\ \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^0 \\ B = 60^0 \end{cases}$$

<u>Ghi chú</u>:

Trong tam giác ABC ta có

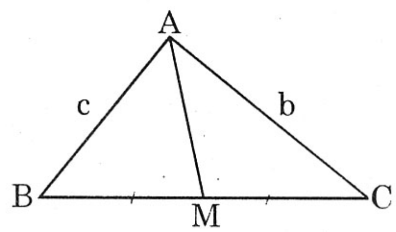
$a = b \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \sin A = \sin B \Leftrightarrow \cos A = \cos B$

## II. ĐỊNH LÝ VỀ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM thì:

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}}$$

hay : $\boxed{c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2}}$



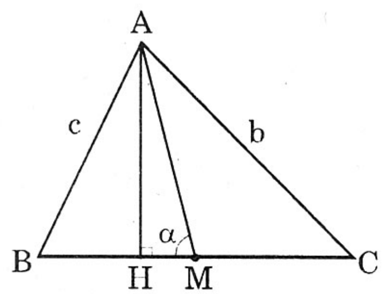

**<u>Bài 192:</u>** Cho $\triangle ABC$ có AM trung tuyến, $\widehat{AMB} = \alpha$, AC = b, AB = c, S là diện tích $\triangle ABC$. Với $0 < \alpha < 90^0$

a/ Chứng minh: $\text{cotg}\alpha = \dfrac{b^2 - c^2}{4S}$

b/ Giả sử $\alpha = 45^0$, chứng minh: $\text{cotg}C - \text{cotg}B = 2$

a/ $\triangle AHM$ vuông $\Rightarrow \text{cotg}\alpha = \dfrac{HM}{AH} = \dfrac{MB - BH}{AH}$

$$\Rightarrow \text{cotg}\alpha = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} (1)$$



Mặt khác: $\dfrac{b^2-c^2}{4S}=\dfrac{\left(a^2+c^2-2ac\cos B\right)-c^2}{2AH.a}$

Đặt BC = a

$\Rightarrow \dfrac{b^2-c^2}{4S}=\dfrac{a}{2AH}-\dfrac{c\cos B}{AH}=\dfrac{a}{2AH}-\dfrac{BH}{AH}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được : $\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{b^2-c^2}{4S}$

<u>Cách khác</u>:

Gọi $S_1$, $S_2$ lần lượt là diện tích tam giác ABH và ACH

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ABH và ACH ta có:

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{AM^2+BM^2-c^2}{4S_1} \quad (3)$$

$$-\operatorname{cotg}\alpha=\frac{AM^2+CM^2-b^2}{4S_2} \quad (4)$$

Lấy (3) – (4) ta có :

$\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{b^2-c^2}{4S}$ ( vì $S_1=S_2=\dfrac{S}{2}$)

b/Ta có: $\operatorname{cotg}C-\operatorname{cotg}B=\dfrac{HC}{AH}-\dfrac{HB}{AH}=\dfrac{HC-HB}{AH}$

$$=\frac{(MH+MC)-(MB-MH)}{AH}$$

$$=\frac{2MH}{AH}=2\operatorname{cotg}\alpha=2\operatorname{cotg}45^0=2$$

<u>Cách khác</u>:

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ABM và ACM ta có:

$$\operatorname{cotg}B=\frac{BM^2+c^2-AM^2}{4S_1} \quad (5)$$

$$\operatorname{cotg}C=\frac{CM^2+b^2-AM^2}{4S_2} \quad (6)$$

Lấy (6) – (5) ta có :

$\operatorname{cotg}C-\cot gB=\dfrac{b^2-c^2}{2S}=2\cot g\alpha=2$ ( vì $S_1=S_2=\dfrac{S}{2}$ và câu a )

**Bài 193** Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến phát xuất từ B và C là $m_b, m_c$ thỏa $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh: $2\text{cotg}A = \text{cotg}B + \text{cotg}C$

Ta có: $\frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 - \frac{c^4}{2} = a^2b^2 + b^2c^2 - \frac{b^4}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 - a^2b^2 = \frac{1}{2}\left(c^4 - b^4\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(c^2 - b^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 - b^2\right)\left(c^2 + b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = c^2 + b^2 \ (1) \left(\text{do } \frac{c}{b} \neq 1\right)$$

Thay $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$ vào (1), ta có (1) thành

$a^2 = 2bc\cos A$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{4R^2\sin^2 A}{2(2R\sin B)(2R\sin C)}$$

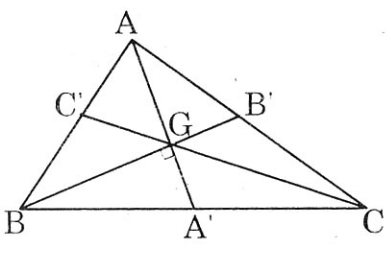
$$\Leftrightarrow 2\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{cotg}A = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B\sin C} = \text{cotg}C + \text{cotg}B$$

**Bài 194**: Chứng minh nếu $\triangle ABC$ có trung tuyến AA' vuông góc với trung tuyến BB' thì cotgC = 2 (cotgA + cotgB)

$\triangle GAB$ vuông tại G có GC' trung tuyến nên AB = 2GC'

Vậy $AB = \frac{2}{3}CC'$




$$\Leftrightarrow 9c^2 = 4m_c^2$$

$$\Leftrightarrow 9c^2 = 2\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2$$

$\Leftrightarrow 5c^2 = c^2 + 2ab\cos C$ (do định lý hàm cos)

$$\Leftrightarrow 2c^2 = ab\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2(2R\sin C)^2 = (2R\sin A)(2R\sin B)\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 C = \sin A \sin B \cos C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \text{cotg}C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sin A\cos B + \sin B\cos A)}{\sin A \sin B} = \text{cotg}C$$

$$\Leftrightarrow 2(\text{cotg}\,B + \text{cotg}A) = \text{cotg}C$$

## III. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Gọi S: diện tích $\triangle ABC$

R: bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

r: bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

p: nửa chu vi của $\triangle ABC$

thì

$$\boxed{\begin{aligned} &S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A \\ &S = \frac{abc}{4R} \\ &S = pr \\ &S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}}$$

**Bài 195:** Cho $\triangle ABC$ chứng minh: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}$

Ta có:

$\sin 2A + (\sin 2B + \sin 2C)$

$= \sin 2A + 2\sin(B + C).\cos(B - C)$

$= 2\sin A\cos A + 2\sin A\cos(B - C)$

$= 2\sin A[\cos A + \cos(B - C)]$

$= 2\sin A[-\cos(B + C) + \cos(B - C)]$

$= 2\sin A.[2\sin B.\sin C]$

$= 4.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R} = \frac{1}{2}\frac{abc}{R^3} = \frac{1}{2}\frac{4RS}{R^3} = \frac{2S}{R^2}$

**Bài 196** Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

$$S = \text{Diện tích } (\triangle ABC) = \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

Ta có : $S = dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \frac{1}{2}ab\sin(A+B)$

$= \frac{1}{2}ab[\sin A\cos B + \sin B\cos A]$

$= \frac{1}{2}ab\left[\left(\frac{a}{b}\sin B\right)\cos B + \left(\frac{b}{a}\sin A\right)\cos A\right]$ (do đl hàm sin)

$= \frac{1}{2}\left[a^2\sin B\cos B + b^2\sin A\cos A\right]$

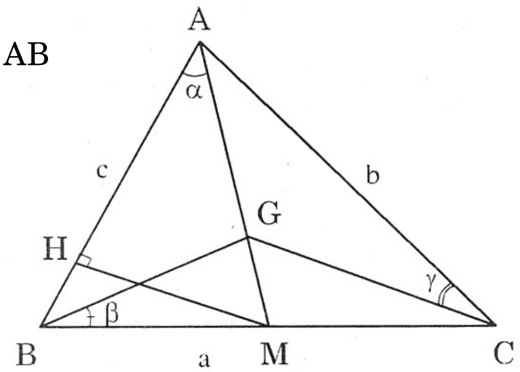
$= \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$

---

**Bài 197**: Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm G và $\widehat{GAB} = \alpha, \widehat{GBC} = \beta, \widehat{GCA} = \gamma$.

Chứng minh: $\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$

---




Gọi M là trung điểm BC, vẽ $MH \perp AB$

$\Delta AMH \perp \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AH}{AM}$

$\Delta BHM \perp \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{MB} = \frac{2BH}{a}$

Ta có: AB = HA + HB

$\Leftrightarrow c = AM\cos\alpha + \frac{a}{2}\cos B$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{AM}\left(c - \frac{a}{2}\cos B\right) \qquad (1)$

Mặt khác do áp dụng định lý hàm sin vào $\Delta AMB$ ta có :

$$\frac{MB}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin B} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{AM}MB\sin B = \frac{a}{2AM}\sin B \quad (2)$$

Lấy (1) chia cho (2) ta được :

$$\cot g\alpha = \frac{c - \frac{a}{2}\cos B}{\frac{a}{2}\sin B} = \frac{2c - a\cos B}{a.\frac{b}{2R}}$$

$$= \frac{R(4c - 2a\cos B)}{ab} = \frac{R(4c^2 - 2ac\cos B)}{abc}$$

$$= \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{\frac{abc}{R}} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S}$$

Chứng minh tương tự :

$$\cot g\beta = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S}$$

$$\cot g\gamma = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

Do đó:

$$\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma$$

$$= \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} + \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

$$= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$$

**<u>Cách khác</u>** : Ta có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (*)

$$\cot g\alpha = \frac{c^2 + m_a^2 - \frac{a^2}{4}}{4S_{\Delta ABM}} = \frac{4c^2 + 4m_a^2 - a^2}{8S} (a)$$

Tương tự $\cot g\beta = \frac{4a^2 + 4m_b^2 - b^2}{8S} (b), \cot g\gamma = \frac{4b^2 + 4m_c^2 - c^2}{8S} (c)$

Cộng (a), (b), (c) và kết hợp (*) ta có:

$$\cot g\,\alpha + \cot g\,\beta + \cot g\,\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$$

## IV. <u>BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN</u>

Gọi R bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$
và r bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$ thì

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{abc}{4S} \\ r = \dfrac{S}{p} \\ r = (p-a)\,tg\dfrac{A}{2} = (p-b)\,tg\dfrac{B}{2} = (p-c)\,tg\dfrac{C}{2} \end{array}}$$

**<u>Bài 198:</u>** Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$.
Chứng minh:

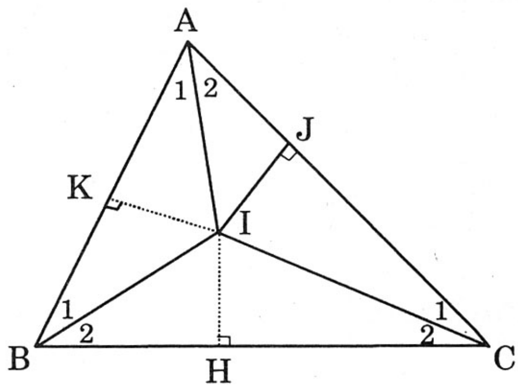
a/ $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

b/ $IA.IB.IC = 4Rr^2$

a/ Ta có : $\Delta IBH \perp \Rightarrow \text{cotg}\frac{B}{2} = \frac{BH}{IH}$

$$\Rightarrow BH = r\text{cotg}\frac{B}{2}$$

Tương tự $HC = r\,\text{cotg}\frac{C}{2}$




Mà : $BH + CH = BC$

nên

$$r\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right) = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{r\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = a$$

$$\Leftrightarrow r\cos\frac{A}{2} = (2R\sin A)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r\cos\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\ \left(\text{do } \cos\frac{A}{2} > 0\right)$$

b/ Ta có : $\Delta \perp AKI \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$

Tương tự $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}};\ IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$

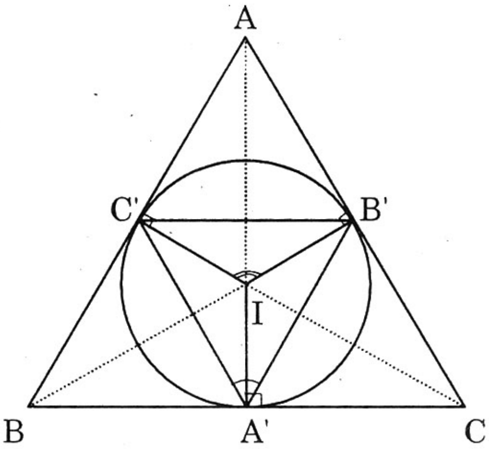
Do đó : $IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

$$= \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2 \text{ (do kết quả câu a)}$$

**<u>Bài 199</u>:** Cho $\Delta ABC$ có đường tròn nội tiếp tiếp xúc các cạnh $\Delta ABC$ tại A’, B’, C’. $\Delta A'B'C'$ có các cạnh là a’, b’, c’ và diện tích S’. Chứng minh:

$$a/\ \frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$b/\ \frac{S'}{S}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$




a/ Ta có : $\widehat{C'A'B'}=\frac{1}{2}\widehat{C'IB'}=\frac{1}{2}(\pi-A)=\frac{1}{2}(B+C)$

Áp dụng định lý hình sin vào $\Delta A'B'C'$

$\frac{a'}{\sin A'}=2r$ (r: bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$)

$\Rightarrow a'=2r\sin\widehat{A'}=2r\sin\frac{B+C}{2}$ (1)

$\Delta ABC$ có : $a=BC=BA'+A'C$

$$\Rightarrow a=r\cot g\frac{B}{2}+r\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow a=r\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\quad(2)$$

Lấy $\frac{(1)}{(2)}$ ta được $\frac{a'}{a}=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Tương tự $\frac{b'}{b}=2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}$

Vậy $$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right).$$

b/ Ta có: $\widehat{A'C'B'}=\frac{1}{2}.\widehat{B'IA'}=\frac{1}{2}(\pi-C)=\frac{1}{2}(A+B)$

Vậy $\sin C' = \sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$

Ta có: $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{dt(\Delta A'B'C')}{dt(\Delta ABC)} = \dfrac{\frac{1}{2}a'b'\sin C'}{\frac{1}{2}ab\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{b'}{b}\right)\frac{\sin C'}{\sin C}$$

$$= 4\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$$

**Bài 200:** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I. Biết GI vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{BCA}$. Chứng minh:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$$

Vẽ $GH \perp AC, GK \perp BC, ID \perp AC$

IG cắt AC tại L và cắt BC tại N

Ta có: $Dt(\Delta CLN) = 2Dt(\Delta LIC)$

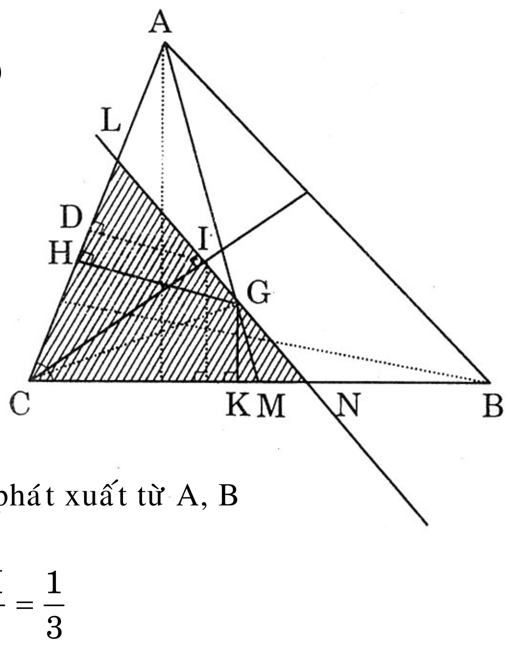
$= ID.LC = r.LC$ (1)

Mặt khác:

$Dt(\Delta CLN) = Dt(\Delta GLC) + Dt(\Delta GCN)$

$= \dfrac{1}{2}(GH.LC + GK.CN)$ (2)

Do $\Delta CLN$ cân nên $LC = CN$




Từ (1) và (2) ta được:

$$rLC = \frac{1}{2}LC(GH + GK)$$

$\Leftrightarrow 2r = GH + GK$

Gọi $h_a, h_b$ là hai đường cao $\Delta ABC$ phát xuất từ A, B

Ta có: $\dfrac{GK}{h_a} = \dfrac{MG}{MA} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{GH}{h_b} = \dfrac{1}{3}$

Do đó: $2r = \dfrac{1}{3}(h_a + h_b)$ (3)

Mà: $S = Dt(\Delta ABC) = pr = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b$

Do đó: $h_a = \frac{2pr}{a}$ và $h_b = \frac{2pr}{b}$

Từ (3) ta có: $2r = \frac{2}{3}pr\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}p\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b+c}{3}$$

Th.S Phạm Hồng Danh *(TT luyện thi Vĩnh Viễn)*

# BÀI TẬP

1. Cho $\Delta ABC$ có ba cạnh là a, b, c. R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp $\Delta ABC$. Chứng minh:
   a/ $(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}+(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}+(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2}=0$
   b/ $1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$
   c/ Nếu $\text{cotg}\frac{A}{2},\text{cotg}\frac{B}{2},\text{cotg}\frac{C}{2}$ là cấp số cộng thì a, b, c cũng là cấp số cộng.
   d/ Diện tích $\Delta ABC = R\,r(\sin A+\sin B+\sin C)$
   e/ Nếu : $a^4=b^4+c^4$ thì $\Delta ABC$ có 3 góc nhọn và $2\sin^2 A=\text{tg}B.\text{tg}C$
2. Nếu diện tích ( $\Delta ABC$ ) = (c + a -b)(c + b -a) thì $\text{tg}C=\frac{8}{15}$
3. Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn. Gọi A', B', C' là chân các đường cao vẽ từ A, B, C. Gọi S, R, r lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\Delta ABC$. Gọi S', R', r' lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của $\Delta A'B'C'$. Chứng minh:
   a/ S' = 2ScosA.cosB.cosC
   b/ $R'=\frac{R}{2}$
   c/ r' = 2RcosA.cosB.cosC
4. $\Delta ABC$ có ba cạnh a, b, c tạo một cấp số cộng. Với a < b < c
   Chứng minh :
   a/ ac = 6Rr
   b/ $\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$
   c/ Công sai $d=\frac{3r}{2}\left(\text{tg}\frac{C}{2}-\text{tg}\frac{A}{2}\right)$
5. Cho $\Delta ABC$ có ba góc A, B, C theo thứ tự tạo 1 cấp số nhân có công bội q = 2.
   Chứng minh:
   a/ $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
   b/ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{5}{4}$