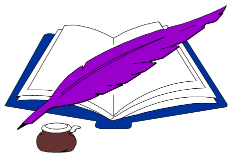
TRƯỜNG THPT GÒ CÔNG ĐÔNG

TÀI LIỆU HỌC TẬP

Hình Học 10

CHƯƠNG I: VECTƠ



GV: Trần Duy Thái

§ 1 : CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT:

- Vectơ là đoạn thẳng có hướng. Ký hiệu : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$ hoặc $\vec{a}$; $\vec{b}$
- Vectơ – không là vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối. Ký hiệu $\vec{0}$.
- Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- Hai vectơ cùng phương là hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng
- Hai vecto cùng hướng thì luôn cùng phương.
- Độ dài vecto $\overrightarrow{AB}$ chính là độ dài đoạn thẳng AB. Kí hiệu: $|\overrightarrow{AB}|$ = AB
- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài

Vậy: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng} \end{cases}$

✷**Các phương pháp chứng minh**:

- Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- Chứng minh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP:

✷***Dạng 1: Xác định một vectơ, sự cùng phương và hướng của hai vectơ***

☞**Phương pháp giải:**

- *Để xác định vectơ ta cần biết độ dài và hướng của vectơ, hoặc biết điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Ví dụ 2 điểm phân biệt A, B ta có 2 vectơ khác nhau là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.*
- *Vectơ $\vec{a}$ là vectơ-không khi và chỉ khi $|\vec{a}| = 0$ hoặc $\vec{a} = \overrightarrow{AA}$ với A là điểm bất kì.*

☞**Bài tập:**

Bài 1: Cho ΔABC . Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ các cạnh của tam giác đó.

Bài 2: Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ 4 điểm đã cho.

Bài 3: Cho ngũ giác ABCDE.

a). Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ các cạnh và đường chéo của ngũ giác.

b). Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ các dỉnh của ngũ giác.

✷***Dạng 2: Khảo sát sự bằng nhau của 2 vectơ.***

☞**Phương pháp giải:** *Để chứng minh 2 vectơ bằng nhau có 3 cách:*

- $\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

- ABCD là hbh $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
- Nếu $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c}$

☞**Bài tập:**

Bài 1: Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tìm các vectơ bằng nhau và chứng minh.

Bài 2: Cho điểm M và $\vec{a}$. Dựng điểm N sao cho:

a). $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ b). $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $\vec{a}$.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD tâm O. Liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau (khác $\vec{0}$) nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DC}$, thì ABCD là hình bình hành.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD, chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với C qua D. Chứng tỏ: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M trên đoạn AB và điểm N trên đoạn CD sao cho AM=CN. Chứng minh: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$.

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. AN và CM lần lượt cắt BD tại E và F. Chứng ming rằng: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

Bài 9: Cho tam giác ABC và điểm M ở trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và M, N, P lần lượt là các điểm đối xứng với M qua A', B', C'. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ b). AN, BP, CQ đồng quy.

Bài 10: Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O.

a). Tìm các vecto khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{OA}$.

b). Tìm các vecto bằng vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OE}$.

Bài 11: Cho hình bình hành ABCD có tâm là O.Tìm các vectơ từ 5 điểm A,B,C,D,O:

a). Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$. b). Có độ dài bằng $|\overrightarrow{OB}|$.

Bài 12: Cho tam giác đều ABC . Các đẳng thức sau đây đúng hay sai?

a). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ b). $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$ c). $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$

Bài 13 : Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$; $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

Bài 14: Cho hình bình hành ABCD. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Gọi I là giao điểm AM và BN, K là giao điểm DM và CN.
CMR: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.

Bài 15 : Cho tam giác ABC có trực tâm H và O tâm là đường tròn ngoại tiếp . Gọi B' là điểm đối xứng B qua O . Chứng minh : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

§ 2 : TỔNG VÀ HIỆU CỦA CÁC VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT:

* **Định nghĩa**: Cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$
* **Tính chất** : * Giao hoán : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  * Kết hợp : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
  * Tính chất vectơ –không : $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
* **Quy tắc 3 điểm** : Cho A, B ,O tùy ý, ta có :
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (phép cộng)
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (phép trừ)
* **Quy tắc hình bình hành**: Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
* **Vecto đối**: Vecto đối của vecto $\vec{a}$ là một vecto có cùng độ dài nhưng ngược hướng.
  Kí hiệu: $-\vec{a}$. Vậy $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
  Chú ý: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
* **Tính chất trung điểm và tính chất trọng tâm**:
  - I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
  - G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP:

✷ ***Dạng 1: Tìm tổng của hai vectơ và tổng của nhiều vectơ***

☞**Phương pháp giải:**

Dùng định nghĩa tổng của 2 vectơ, quy tắc 3 điểm, quy tắc hbh và các tính chất của tổng các vectơ

☞**Bài tập:**

Bài 1: Cho hbh ABCD. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD.

a). Tìm tổng của 2 vecto $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

b). Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Bài 2: Cho lục giác đều ABCDEFF tâm O. Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Bài 3: Cho năm điểm A, B, C, D, E. Hãy tính tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$.

✷ ***Dạng 2: Tìm vectơ đối và hiệu của 2 vectơ***

☞**Phương pháp giải:**

- *Theo định nghĩa, tìm hiệu $\vec{a} - \vec{b}$, ta làm hai bước sau:*

- Tìm vectơ đối của $\vec{b}$

- *Tính tổng* $a+(-b)$

- *Vận dụng quy tắc* $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ *với ba điểm O, A, B bất kì.*

☞**Bài Tập**:

Bài 1: Cho tam giac ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC.

a). Tìm hiệu $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN},\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC},\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN},\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

b). Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Bài 2: Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

Bài 3: Cho 2 điểm phân biệt A và B. Tìm điểm M thỏa mãn 1 trong các điều kiện sau:

a). $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ b). $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ c). $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Bài 4: Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

✷ ***Dạng 3: Chứng minh đẳng thức vectơ:***

☞**Phương pháp giải:**

+ Sử dụng qui tắc ba điểm;quy tắc hình bình hành; trung điểm.
+ Vận dụng các các chứng minh đẳng thức: biến đổi VT thành VP và ngược lại; biến đổi hai vế cùng thành một đẳng thức; biến đổi đẳng thức đã cho thành một đẳng thức luôn đúng.

☞**Bài tập**:

Bài 1: Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D. Chứng minh các đẳng thức sau:

a). $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ b). $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ c). $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Bài 2: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}.$$

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Chứng minh:

$$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB} \text{ và } \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}.$$

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD tâm O. M là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB} \text{ và } \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.$$

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M và N là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:

a). $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NA}=\vec{0}$ b). $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

Bài 6: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. CMR : (Bằng nhiều cách khác nhau)

a). $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ b). $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

c). $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$ d). $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

e). $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$ f) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD, M tùy ý. Cm: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

Bài 8: Δ ABC có G là trọng tâm, các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD có tâm O. CMR:

a). $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ b). $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$

c). $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$ d). $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

Bài 10: Cho ΔABC. Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh: $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

Bài 11: Cho lụ giác đều ABCDEF có tâm là O . CMR :

a). $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$ b). $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$

c). $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}$ d). $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}$ (M tùy ý)

Bài 12: Cho 7 điểm A ; B ; C ; D ; E ; F ; G . Chứng minh rằng :

a). $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

b). $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$

c). $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{GF}$

d). $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$

Bài 13: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P là trung điểm AB, AC, BC. CMR: với điểm O bất kì: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$

Bài 14 : Cho tam giác ABC . Gọi A' la điểm đối xứng của B qua A, B' là điểm đối xứng với C qua B, C' là điểm đối xứng của A qua C. Với một điểm O bất kỳ, CMR:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$$

Bài 15: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O , trực tâm H , vẽ đường kính AD

a). Chứng minh rằng $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$

b). Gọi H' là đối xứng của H qua O .Chứng minh rằng $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH'}$

Bài 16: CMR: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Bài 17: Cho hình bình hành ABCD tâm O . Đặt $\overrightarrow{AO}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$

Tính $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DA}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Bài 18: Cho tam giác ABC. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

✷ ***Dạng 4: Tính độ dài của vectơ:***

☞**Phương pháp giải:**

Đưa tổng hoặc hiệu của các vectơ về một vectơ có độ dài là một cạnh của đa giác.

☞**Bài tập**:

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A biết AB=a, AC=2a. Tính: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$

Bài 2: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A biết AB=a và $\widehat{B}=60^0$. Tính: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

Bài 4: Cho tam giác đều ABC cạnh a và đường cao AH. Tính: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$; $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}\right|$; $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

Bài 5: Cho hình vuông ABCD cạnh a . Tính $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}|$; $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$ theo a

Bài 6: Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD}=60^0$ và cạnh là a. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Tính:

a. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$ b. $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|$ c. $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|$

Bài 7: Cho hình vuông ABCD cạnh a có O là giao điểm hai đường chéo. Tính

a. $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|$ b. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|$ c. $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

Bài 8: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a. Với M tùy ý, Hãy chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

b. Chứng minh rằng: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$

Bài 9: Cho 2 véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng khác $\vec{0}$. Khi nào thì:

a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$; b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$; C) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$

Bài 10: Tìm tính chất tam giác ABC, biết rằng : $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$

§ 3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT:

* Cho số thực $k\neq 0$, $\vec{a}\neq\vec{0}$. Tích của một số thực k và vecto $\vec{a}$ là 1 vectơ, kí hiệu: $k\vec{a}$ và được xác định:

- Nếu $k>0$ thì $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$; $k<0$ thì $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$.
- Độ dài: $\left|k.\vec{a}\right|=|k|.|\vec{a}|$

✷**Tính chất** :

a). $k(m\vec{a})=(km)\vec{a}$ b). $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$

c). $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ d). $k\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$

- $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a}\neq\vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa $\vec{b}=k\vec{a}$.
- Điều kiện cần và đủ để A , B , C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- Tính chất trung điểm và tính chất trọng tâm:
  - I trung điểm đoạn thẳng AB, với mọi điểm M bất kỳ: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
  - G là trọng tâm ΔABC , với mọi điểm M bất kỳ: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.
- Phân tích một vecto theo hai vecto không cùng phương:
  - Cho $\vec{b}$, $\vec{a}$ là hai vecto không cùng phương, với mọi $\vec{x}$ tùy ý, khi đó: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (m, n duy nhất).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP:

✷ **Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vectơ:**

Bài 1: Cho hình bình hành ABCD. Cmr: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$

Bài 2: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, D là trung điểm của AM. Cm:

a). $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ b). $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OD}$ (với O tùy ý)

Bài 3: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. CMR: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$, với M bất kỳ.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của 2 đường chéo AC và BD. CMR: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MI}$

Bài 5: Gọi I, J lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD.

Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

Bài 6: CMR nếu G và G' lần lượt là trọng tâm của ΔABC và ΔA'B'C' thì $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$

Bài 7: Cho tứ giác ABCD. Gọi E,F là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm EF.

CMR: a). $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$ b). $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c). $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kỳ)

Bài 8: Gọi M,N là trung điểm AB và CD của tứ giác ABCD. Cmr:

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Bài 9: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

CMR: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

Bài 10: CMR: nếu G và G' là trọng tâm của hai tam giác ABC và A'B'C' thì $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$. Suy ra điều kiện để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 11: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Bài 12: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O.

a). Chứng minh tứ giác HCDB là hình bình hành.

b). Chứng minh:

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

c). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. CMR: $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

Từ đó có kết luận gì về 3 điểm O,H,G.

Bài 13: Cho tứ giác ABCD.

a). Gọi M,N là trung điểm AD, BC, chứng minh: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b). Gọi O là điểm nằm trên đoạn MN và OM = 2ON.

CMR: $\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Bài 14: Cho tam giác A, B, C. G là trọng tâm của tam giác và M là một điểm tuỳ ý trong mặt phẳng. CMR:

a). $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ b). $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Bài 15: Cho hình bình hành ABCD tâm I. $\overrightarrow{AO}=\vec{a};\overrightarrow{BO}=\vec{b}$

a). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$

b). Tính $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DA}$ theo $\vec{a};\vec{b}$.

Bài 16: Cho 4 điểm A, B, C, D; M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{MN}$.

Bài 17: Gọi O; H; G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm; trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng: a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ b) $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$.

Bài 18: Cho tam giác đều ABC tâm O. M là một điểm tuỳ ý bên trong tam giác; D, E, F lần lượt là hình chiếu của nó trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Bài 19: Cho 4 điểm A, B, C, D; I, F lần lượt là trung điểm của BC, CD. CM: $2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DA}\right)=3\overrightarrow{DB}$.

Bài 20: Cho tam giác ABC với G là trọng tâm; H là điểm đối xứng với B qua G. CM:

a). $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

b). M là trung điểm của BC. CM: $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

✷**Dạng 2: Tìm một điểm thỏa một đẳng thức vecto cho trước.**

> ** **Phương pháp tìm điểm M thỏa một đẳng thức vecto cho trước:***
> - ***B_1**: Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng: $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$, trong đó A là điểm cố định, $\vec{u}$ cố định.*
> - ***B_2**: Dựng điểm M thỏa $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.*

Bài Tập:

Bài 1: Cho hai điểm phân biệt A và B. tìm điểm K sao cho: $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC.

a). Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

b). Tìm điểm O sao cho $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

c). Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

d). Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm O sao cho $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Bài 4: Cho tam giác ABC.

a). Tìm điểm I sao cho $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

b). Tìm điểm J sao cho $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

c). Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}$

d). Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{BC}$

e). Tìm điểm L sao cho $3\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

HD:

c). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó với mọi K ta có: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=3\overrightarrow{KG}$

e). $3\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=(\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB})+2(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LC})$. Sau đó áp dụng quy tắc 3 điểm và hệ thức trung điểm.

Bài 5: Cho hai điểm A, B. Xác định điểm M biết: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Bài 6: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho NC=2NA.

a). Xác định điểm K sao cho: $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$

b). Xác định điểm D sao cho: $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

Bài 7: Cho các điểm A, B, C, D, E. Xác định các điểm O, I, K sao cho:

$a).\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$b).\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$c).\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE})=\vec{0}$

Bài 8: Cho tam giác ABC. Xác định các điểm M, N sao cho:

a). $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ b). $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}$.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD. Xác định điểm M thoả mãn:

$3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Bài 10: Cho tứ giác ABCD. Xác định vị trí điểm O thoả mãn: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

✷ **Dạng 3: Phân tích một vecto theo hai vecto không cùng phương.**

* ***Phương pháp***: *Áp dụng các kiến thức:*
* ***Quy tắc 3 điểm***: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ *(phép cộng)*
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ *(phép trừ)*
* ***Quy tắc đường chéo hình bình hành***: *Nếu ABCD là hình bình hành thì*
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
* ***Tính chất trung điểm***: *I là trung điểm AB* $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ *(M bất kỳ)*
* ***Tính chất trọng tâm***: *G là trọng tâm* $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ *(M bất kỳ)*

☞**Bài Tập:**

Bài 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Cho các điểm D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. I là giao điểm AD và EF. Hãy phân tích các vecto $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$. Hãy phân tích vecto $\overrightarrow{AM}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bài 3: Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Hãy phân tích vecto $\overrightarrow{AM}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bài 4: Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích các vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AK},\overrightarrow{BM}$.

Bài 5: Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của đoạn AG, K là điểm trên cạnh AB sao cho $AK=\frac{1}{5}AB$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK},\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CK}$ theo $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.

Bài 6: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O cạnh a.

a. Phân tích vecto $\overrightarrow{AD}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}$.

b. Tính độ dài $\left|\vec{u}\right|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|$ theo a.

Bài 7: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bài 8: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho NA = 2NC. Gọi K là trung điểm MN. Phân tích vecto $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bài 9: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho NC = 2NA. Gọi K là trung điểm MN.

a. Phân tích vecto $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

b. Gọi D là trung điểm BC. Cm: $\overrightarrow{KD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 10: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P là trung điểm BC,CA,AB. Tính các vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ theo các vecto $\overrightarrow{BN},\overrightarrow{CP}$

Bài 11: Cho hình vuông ABCD, E là trung điểm CD. Hãy phân tích $\overrightarrow{AE}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$.

Bài 12: Cho tam giác ABC, gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng của B qua G.

a). Chứng minh: $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

b). Gọi M là trung điểm BC, chứng minh: $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 13: Cho hình bình hành ABCD, tâm O. đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Hãy tính các vecto sau đây theo $\vec{a},\vec{b}$.

a). $\overrightarrow{AI}$ (I là trung điểm BO).

b). $\overrightarrow{BG}$ (G là trọng tâm tam giác OCD).

*** ĐS:** $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ $\overrightarrow{BG}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$

Bài 14: Cho tam giác ABC và G là trọng tâm. B_1 đối xứng với B qua G. M là trung điểm BC. Hãy biểu diễn các véc tơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{MB_1}$ qua hai véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Bài 15: Cho tam giác ABC, gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI = 3BI và J thuộc BC kéo dài sao cho 5JB = 2JC.

a). Tính $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Từ đó biểu diễn $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$.

b). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$.

✷ **Dạng 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng:**

* **Phương pháp**: *Ba điểm A,B,C thẳng hàng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$
Để chứng minh được điều này ta có thể áp dụng một trong hai phương pháp:
+ Cách 1: Áp dụng các quy tắc biến đổi véctơ.
+ Cách 2: Xác định hai véctơ trên thông qua tổ hợp trung gian.

☛ **Bài Tập:**

Bài 1 : Cho 4 điểm O, A, B, C sao cho $3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. CMR: A, B, C thẳng hàng.

Bài 2 : Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm AM và K là một điểm trên cạnh AC sao cho AK = $\frac{1}{3}$ AC.

a). Phân tích vecto $\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BI}$ theo hai vecto $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$

b). Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Bài 3: Cho ΔABC. I là điểm trên cạnh AC sao cho $CI=\frac{1}{4}AC$, J là điểm mà

$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

a). Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

b). Chứng minh B, I, J thẳng hàng.

Bài 4: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC; D và E là hai điểm sao cho: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$

a). Chứng minh: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

b). Tính véctơ: $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AI}$.

c). Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Bài 5: Cho tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$

a). Gọi P là điểm đối xứng với B qua C. Tính $\overrightarrow{AP}$ theo $\vec{u}$; $\vec{v}$?

b). Qọi Q và R là hai điểm định bởi: $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Tính $\overrightarrow{RP};\overrightarrow{RQ}$ theo $\vec{u}$; $\vec{v}$.

c). Suy ra P, Q, R thẳng hàng.

Bài 6: Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Lấy điểm I, J sao cho: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

a). CMR: M, N, J thẳng hàng với M, N là trung điểm của AB và BC.

b). CMR: J là trung điểm của BI.

Bài 7: Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Lấy các điểm I, J thoả mãn: $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$; $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 8: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm M, N, P thoả mãn: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ $3\overrightarrow{AN}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}$. Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD. Lấy các điểm I, J thoả mãn: $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}-2\overrightarrow{JD}=\vec{0}$ $\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

Chứng minh : I, J, O thẳng hàng với O là giao điểm của AC và BD.

Bài 10: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm M, N, P sao cho: $\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 11: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.Chứng minh B,M,C thẳng hàng

Bài 12: Cho tam giác ABC .Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC sao cho AM= $\frac{1}{2}$MB , AN= 3NC và điểm P xác định bởi hệ thức $4\overrightarrow{PB}+9\overrightarrow{PC}=\vec{0}$. Gọi K là trung điểm MN.

a). Chứng minh: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

b). Chứng minh : Ba điểm A, K, P thẳng hàng.

Bài 13 : Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{O}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{O}$. Chứng minh MN // AC

✷ **Dạng 4: Chứng minh hai điểm trùng nhau:**

*** Phương pháp :**

Để chứng minh M và M' trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai hướng:

+ Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

+ Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}$ với O là điểm tuỳ ý.

Bài 1: Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Bài 2: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Cmr hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M,N,P,Q là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DA. Cmr hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD. Gọi I,J là trung điểm của AB và CD.

a). CMR: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

b). Gọi G là trung điểm IJ. Cm: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

c). Gọi P, Q là trung điểm các đoạn thẳng AC và BD, M và N là trung điểm AD và BC. CMR: Ba đoạn thẳng IJ, PQ, MN có chung trung điểm.

✷ **Dạng 5: Quỹ tích điểm**

***Phương pháp:**

Đối với các bài toán quỹ tích, học sinh cần nhớ một số quỹ tích cơ bản sau:

- Nếu $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$ với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

- Nếu $|\overrightarrow{MC}|=k.|\overrightarrow{AB}|$ với A, B, C cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k.|\overrightarrow{AB}|$.

- Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}$ thì

+ M thuộc đường thẳng qua A song song với BC nếu $k \in R$

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ nếu $k \in R^+$

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ nếu $k \in R^-$

*** Bài tập áp dụng:**

Bài 1: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a). $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$

b). $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

Bài 2: Cho tam giác ABC. M là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng.

a). CMR: véctơ $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ không đổi.

b). Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn: $\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

§ 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT:

1. Định nghĩa tọa độ của một vectơ, độ dài đại số của một vectơ trên một trục

- $\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j}$
- *M có tọa độ là (x; y)* $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$
- $A(x_A; y_A)$ *và* $B(x_B; y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

2. Tọa độ của $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, k$\vec{a}$

* *Cho* $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$, $k \in R$

Ta có: $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1; a_2+b_2)$; $\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1; a_2-b_2)$; $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$

* *Hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \end{cases}$

3.+ I là trung điểm của đoạn thẳng AB ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

+ G là trọng tâm của tam giác ABC ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP:

✷ ***Dạng1: Xác định tọa độ của véctơ và của một điểm trên mp tọa độ Oxy:***

☞**Phương pháp giải:**

Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của vectơ và tọa độ của một điểm trêm mp tọa độ Oxy.

* *Nếu biết tọa độ hai điểm A* (x_A, y_A), *B*(x_B, y_B) *thì ta tính được tọa độ của* $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

* *Nếu M và N có tọa độ lần lượt là a, b thì* $\overline{MN} = b - a$

☞**Bài tập:**

Bài 1: Trên trục (O, $\vec{i}$) cho hai điểm M và N có tọa độ lần lượt là -5; 3. tìm tọa độ điểm P trên trục sao cho $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = \dfrac{1}{2}$

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD có AD=4 và chiều cao ứng với cạnh AD=3, góc BAD=60^0, chọn hệ trục (A; $\vec{i}$, $\vec{j}$) sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài 3: Trên trục x'Ox cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là –2 và 5.

a). Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

b). Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

c). Tìm tọa độ của điểm M sao cho 2$\overrightarrow{MA}$ + 5$\overrightarrow{MB}$ = $\vec{0}$.

d). Tìm tọa độ điểm N sao cho 2$\overline{NA}$ + 3$\overline{NB}$ = –1.

Bài 4: Trên trục x'Ox cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c.

a). Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

b). Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}$ + $\overrightarrow{MB}$ – $\overrightarrow{MC}$ = $\vec{0}$.

c). Tìm tọa độ điểm N sao cho 2$\overrightarrow{NA}$ – 3$\overrightarrow{NB}$ = $\overrightarrow{NC}$.

Bài 5: Trên trục x'Ox cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là –3 và 1.

a). Tìm tọa độ điểm M sao cho 3$\overline{MA}$ – 2$\overline{MB}$ = 1.

b). Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overline{NA}$ + 3$\overline{NB}$ = $\overline{AB}$.

Bài 6: Trên trục x'Ox cho 4 điểm A (–2) ; B(4) ; C(1) ; D(6)

a). CMR : $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} = \dfrac{2}{\overline{AB}}$

b). Gọi I là trung điểm AB. CMR: $\overline{IC}.\overline{ID} = \overline{IA}^2$

c). Gọi J là trung điểm CD. CMR: $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD có A(-1;3); B(2;4), C(0;1). Tìm tọa độ đỉnh D.

Bài 8: Cho Δ ABC, các điểm M(1;0); N(2;2) và P(-1;3) lần lượt là trung điểm của các cạnh BC; CA; AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Bài 9: Cho Δ ABC, các điểm M(1;1); N(2;3) và P(0;4) lần lượt là trung điểm của các cạnh BC; CA; AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Bài 10: Cho Δ ABC, các điểm A(-5;6); B(-4;-1) và C(4;3). Tìm tọa độ trung điểm I của AC. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 11: Cho 3 điểm A(2;5); B(1;1); C(3;3).

a). Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

b). Tìm tọa độ điểm E sao cho tứ giác ABCE là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình hành đó.

Bài 12: Cho tam giác ABC có A(-1;1), B(5;-3), C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên Ox. Tìm tọa độ C.

✷ ***Dạng 2: Tìm tọa độ của các vectơ*** $\vec{u}+\vec{v}; \vec{u}-\vec{v}; k\vec{u}$

☞**Phương pháp giải**: *Tính theo công thức tọa độ* $\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $k\vec{u}$

☞**Bài tập**:

Bài 1: Cho $\vec{a} = (2;1)$; $\vec{b} = (3;4)$; $\vec{c} = (7;2)$.

a).Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

b).Tìm tọa độ vectơ $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

c).Tìm hai số j; k sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

Bài 2: Cho $\vec{a} = (1;2); \vec{b} = (-3;1); \vec{c} = (-4;-2)$

a). Tìm tọa độ các vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$.

và xem vectơ nào trong các vectơ cùng phương với véctơ $\vec{i}$ và cùng phương với $\vec{j}$.

b). Tìm các số m, n sao cho $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

Bài 3: Tìm x để các cặp vectơ sau cùng phương

a). $\vec{a} = (2;3)$ và $\vec{b} = (4;x)$.

b). $\vec{u} = (0;5)$ và $\vec{b} = (x;7)$.

c). $\vec{m} = (x;-3)$ và $\vec{n} = (-2;2x)$.

Bài 4: Biểu diễn véc tơ $\vec{c}$ theo các véc tơ $\vec{a};\vec{b}$ biết:

a). $\vec{a}(2;-1)$; $\vec{b}(-3;4)$; $\vec{c}(-4;7)$ b). $\vec{a}(1;1)$; $\vec{b}(2;-3)$; $\vec{c}(-1;3)$.

Bài 5: Cho bốn điểm A(1;1); B(2;-1); C(4;3); D(16;3). Hãy biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{AD}$ theo các véc tơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

Bài 6: Biểu diễn véc tơ $\vec{c}$ theo các véc tơ $\vec{a};\vec{b}$ biết:

a). $\vec{a}(-4;3)$; $\vec{b}(-2;-1)$; $\vec{c}(0;5)$ b). $\vec{a}(4;2)$; $\vec{b}(5;3)$; $\vec{c}(2;0)$.

Bài 7: Cho bốn điểm A(0;1); B(2;0); C(-1;2); D(6;-4). Hãy biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{AD}$ theo các véc tơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$

✷ ***Dạng 3: Chứng minh 3 điểm thẳng hàng:***

☞**Phương pháp giải:**

Sử dụng điều kiện cần và đủ sau:

** Hai vectơ* $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$ *cùng phương khi và chỉ khi có số k để* $\vec{a} = k\vec{b}$

** Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k để* $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

☞**Bài tập**:

Bài 1: Cho 3 điểm A(-1;1); B(1;3) và C(-2;0). Chứng minh rằng 3 điểm A; B; C thẳng hàng.

Bài 2: Cho 3 điểm M($\frac{4}{3};\frac{7}{3}$); N(2;1) và P(1;3). Chứng minh rằng 3 điểm M; N; P thẳng hàng.

Bài 3: Cho 3 điểm A(3; 4); B(2; 5) và C(1; 5). Tìm x để (-7; x) thuộc đường thẳng AB.

Bài 4: Cho 3 điểm A(-3; 4); B(1; 1) và C(9; -5).

a). Chứng minh rằng 3 điểm A; B; C thẳng hàng.

b). Tìm tọa độ điểm D sao cho A là trung điểm của BD.

c). Tìm tọa độ điểm E trên trục Ox sao cho A; B; E thẳng hàng.

Bài 5: Cho A(2;1); B(6;-1). Tìm toạ độ:

a). Điểm M trên trục hoành sao cho A,B,M thẳng hàng.

b). Điểm N trên trục tung sao cho A, B, N thẳng hàng.

c). Điểm P khác điểm B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 2\sqrt{5}$.

Bài 6: Cho A(-1;-4); B(3;4). Tìm toạ độ:

a). Điểm M trên trục hoành sao cho A,B,M thẳng hàng.

b). Điểm N trên trục tung sao cho A, B, N thẳng hàng.

c). Điểm P khác điểm B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 3\sqrt{5}$.

Bài 7: Tìm điểm P trên đường thẳng (d): x+y=0 sao cho tổng khoảng cách từ P tới A và B là nhỏ nhất, biết:

a). A(1;1) và B(-2;-4) b). A(1;1) và B(3;-2)

✷ ***Dạng 4: Xác định điểm thỏa mãn một đẳng thức vectơ, độ dài:***

☞**Bài tập**:

Bài 1: Cho tam giác ABC với A(1;0); B(-3;-5); C(0;3)

a). Xác định toạ độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$

b). Xác định toạ độ điểm F sao cho AF=CF=5

Bài 2: Cho tam giác ABC với A(-1;3); B(2;4); C(0;1). Xác định toạ độ:

a). Trọng tâm G

b). Véc tơ trung tuyến AA_1

c). Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

d). Điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Bài 3: Cho M(1+2t; 1+3t). Hãy tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

Bài 4: Cho tam giác ABC với A(4;6); B(1;4); C(7; $\frac{3}{2}$)

a). CM: ΔABC vuông b). Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 5: Cho tam giác ABC với A(1;-2); B(0;4); C(3;2). Tìm toạ độ của:

a). Trọng tâm G của tam giác .

b). Vectơ trung tuyến ứng với cạnh BC.

c). Điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

d). Tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

e). Điểm M biết: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

f). Điểm N biết: $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Bài 6: Cho tam giác ABC với A(0;3); B(4;6); C(3;3).Tìm toạ độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

✷ Bài Tập Tổng Hợp:

Bài 1: Trong hệ trục Oxy , cho A(1; 2), B(-2; 3), C(-4;6)

a). Tìm tọa độ $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.

b). Tìm tọa độ trung điểm M của BC.

c). Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d). Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

e). Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm I của hình bình hành này.

f). Tìm tọa độ điểm E thuộc Ox sao cho ABCE là hình thang. Tìm tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình thang này.

Bài 2: Trong hệ trục toạ độ oxy , cho tam giác ABC có A(4 ;-1) , B(-2 ;- 4), C(-2;2)

a). Tính chu vi tam giác ABC.

b). Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

c). Tìm toạ độ điểm I biết $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{CI} = \vec{0}$

Bài 3: Trong mặt phẳng Oxy cho A(4; 3), B(2; 7), C(-3: 8) .

a). Chứng minh rằng A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.
Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác.

b). Tìm D để BCGD là hình bình hành. Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo hai $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

c). Tìm tọa độ M thỏa $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = -5\overrightarrow{BC}$.

d). Tìm N thuộc cạnh BC sao cho diện tích tam giác ANB gấp 7 lần diện tích tam giác ANC.

Bài 4: Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(-1;2); B(2;3) và C(1; -4).

a). Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

b). Tìm tọa độ điểm N trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.

c). Tìm tọa độ M thuộc BC thỏa $S_{\Delta AMB} = 7S_{\Delta ABC}$

d). Gọi M, P lần lượt là trung điểm cuả AB và BC. Phân tích $\overrightarrow{AC}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{CM}$.

Bài 5: : Cho hai điểm A(3 , 4) ; B(2 ; 5) .

a). Tìm toạ độ điểm A’ đối xứng với A qua B .

b). Tìm toạ độ điểm D trên Ox sao cho 3 điểm A , B , D thẳng hàng .

c). Tìm toạ độ điểm C sao cho O là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có A(4; 0), B(2; -4), C(0; -2) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh hai tam giác ABC và tam giác MNP có cùng trọng tâm.

Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho G(1 ; 2). Tìm tọa độ điểm A thuộc Ox và B thuộc Oy sao cho G là trọng tâm tam giác OAB.

Bài 8: Trong hệ trục Oxy cho các véctơ $\vec{a} = (2;-1), \vec{b} = (-1;-3), \vec{c} = (3;1)$.

a). Tìm toạ độ của các véctơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \vec{w} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}.$

b). Biểu diễn véctơ $\vec{c}$ theo hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c). Tìm toạ độ của véctơ $\vec{d}$ sao cho $\vec{a} + 2\vec{d} = \vec{b} - 3\vec{c}$.

Bài 9: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm A (1;3) , B (-5; 7) , C (3; 5) .

a). Xác định toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

b). Xác định toạ độ điểm P trên trục tung sao cho P thẳng hàng với A và B .

Bài 10: Trong mặt phẳng Oxy cho A(4; 3), B(2; 7), C(-3: 8) .

a). Chứng minh rằng A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác.

b). Tìm D để BCGD là hình bình hành. Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo hai $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

c). Tìm tọa độ M thỏa $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = -5\overrightarrow{BC}$.

..........Hết..........

“Trên bước đường thành công, không có dấu chân của những kẻ lười biếng”