Bài 1.

Vectơ và các phép toán

1. Các khái niệm cơ bản

1.1 Dẫn dắt đến khái niệm vectơ

Vectơ đại diện cho những đại lượng có hướng và có độ lớn ví dụ: lực, vận tốc,…

1.2 Định nghĩa vectơ và các yếu tố liên quan.

Định nghĩa: Vectơ là đọan thẳng có hướng, tức là trong hai đầu mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối. Ký hiệu $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}$ hoặc $\vec{a}, \vec{b}$.

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là vectơ – không. Ví dụ: $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$,…

Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ (khác vectơ không) là đường thẳng đi qua A, B.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là độ dài đoạn thẳng AB, ký hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$. Độ dài vectơ không bằng 0.

1.3 Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và hai vectơ bằng nhau.

Hai vectơ **cùng phương** khi giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Quy ước: Vectơ – không cùng phương với mọi vectơ

Hai vectơ cùng phương thì **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**. Quy ước: vectơ – không cùng hướng với mọi vectơ

Hai vectơ bằng nhau khi chúng **cùng hướng** và cùng độ dài.

Mọi vectơ - không đều bằng nhau và được ký hiệu là $\vec{0}$

1.4 Dựng một vectơ bằng vectơ cho trước.

Cho vectơ $\vec{a}$ và điểm M. Khi đó ta có thể dựng được duy nhất điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

Chú ý:

+ Chứng minh hai điểm trùng nhau: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow M \equiv M'$

+ Chứng minh 3 điểm thẳng hàng: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng.

2. Định nghĩa các phép toán trên vectơ

2.1 Phép cộng hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, vectơ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ là **vectơ tổng** của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ký hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Vậy ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

2.2 Phép trừ hai vectơ

Cho vectơ $\vec{a}$, khi đó tồn tại vectơ $\vec{b}$ sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Ta gọi $\vec{b}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$. Ta ký hiệu vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là $-\vec{a}$. Vậy $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$. Ví dụ vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là $\overrightarrow{CA}$, vì $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$.

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó vectơ

$\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ được gọi **là vectơ hiệu** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

Như vậy ta có: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Từ đó ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.

2.3 Phép nhân vectơ với một số.

Cho số thực k và vectơ $\vec{a}$ ($\neq\vec{0}$). Khi đó **phép nhân** vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một **vectơ** xác định như sau:

$k.\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k ≥ 0 và ngược hướng $\vec{a}$ khi k < 0.

Và $\left|k.\vec{a}\right|=\left|k\right|.\left|\vec{a}\right|$

Đặc biệt: $k.\vec{0}=\vec{0}\ \forall k$

Chú ý: $k.\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ \vec{a}=0\end{array}\right.$

Chú ý quan trọng: không có định nghĩa phép chia hai vectơ, do đó **không có**

$\vec{b}=k.\vec{a}\Rightarrow k=\frac{\vec{b}}{\vec{a}}$

3. Các công thức cơ bản

3.1 Quy tắc 3 điểm, n điểm.

Cho 3 điểm A, B, C ta luôn có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (1.1)

Cho n điểm A_1, A_2, …, A_n, khi đó ta có $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$ (1.2)

Quy tắc hình bình hành.

Cho hình bình hành ABCD. Khiđó ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (1.3)

3.2 Mối quan hệ giữa hai vectơ cùng phương.

Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ $\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\vec{a}=k.\vec{b}$

Từ đây suy ra nếu $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương thì $x.\vec{a}+y.\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow x=y=0$

3.3 Định lý về biểu diễn một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó với vectơ $\vec{c}$ bất kì thì tồn tại duy nhất hai số x, y sao cho $\vec{c}=x.\vec{a}+y.\vec{b}$

Hệ quả: Cho 3 vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không cùng phương. Chứng minh rằng tồn tại 3 số thực x, y, z không đồng thời bằng 0 sao cho $x.\vec{a}+y.\vec{b}+z.\vec{c}=\vec{0}$. Bộ số (x, y, z) có phải duy nhất không? Vì sao?

3.4 Công thức điểm chia và hệ quả.

Cho hai điểm A, B phân biệt. M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}\left(k\neq1\right)$. Khi đó với điểm O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k.\overrightarrow{OB}}{1-k}$ (1.4)

Hệ quả 1 Khi k = - 1 ta có công thức đường trung tuyến: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ (1.5)

Hệ quả 2 Nếu M nằm giữa A và B, cho k = -MA/MB ta có công thức. $\overrightarrow{OM}=\frac{MB}{AB}.\overrightarrow{OA}+\frac{MA}{AB}.\overrightarrow{OB}$ (1.6)

Hệ quả 3. Cho tam giác ABC với BC = a, AC = b và AB = c, AD là phân giác trong. Khi đó ta có $\overrightarrow{AD}=\frac{DC}{BC}.\overrightarrow{AB}+\frac{DB}{BC}.\overrightarrow{AC}=\frac{b}{b+c}.\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}.\overrightarrow{AC}$ (1.7)

Hệ quả 4*. Đưa công thức (1.6) về dạng diện tích ta sẽ được công thức nào?

Hệ quả 5*. Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trong tam giác. Đặt $S_a=S_{MBC}, S_b=S_{MAC}, S_c=S_{MAB}$. Chứng minh rằng $S_a.\overrightarrow{MA}+S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (1.8) (Hệ thức Jacobi)

Hệ quả 6*. Từ hệ thức 5, nếu cho M là các điểm đặc biệt trong tam giác (trọng tâm, trực tâm, tâm nội tiếp, tâm ngoại tiếp), ta sẽ có những hệ thức nào.

3.5 Tâm tỉ cự của một hệ điểm

Ta bắt đầu từ bài toán sau:

Bài toán 1.Với hai điểm A, B phân biệt cho trước, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (1.9)

Lời giải: Ta có $\vec{0}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, từ đây suy ra điểm M cần tìm chính là trung điểm AB.

Từ bài toán này, ta có thể nghĩ tới bài toán tổng quát hơn chút. Cho hai số thực α, β. Liệu có tồn tại điểm M sao cho $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (1.10)

Theo cách giải bài trên ta có thể biến đổi vế trái của (1.10) như sau:
$\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{AB}$.

Đến đây ta thấy xảy ra hai trường hợp.

Trường hợp 1: Nếu $\alpha+\beta=0$ thì không tồn tại M để (1.10) thỏa vì A, B là hai điểm phân biệt.

Trường hợp 2: Nếu $\alpha+\beta\neq 0$, thì (1.10) thỏa khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, biểu thức này cho ta cách xác định M và hơn nữa M là duy nhất.

Từ điều trên ta có bài toán

Bài toán 2: Cho hai điểm A, B và các số thực α, β thỏa $\alpha+\beta\neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. (1.10) và không tồn tại M thỏa (1.10) nếu $\alpha+\beta=0$ và A , B phân biệt

Bài toán 3: Cho 3 điểm A, B, C và các số thực α, β, γ không đồng thời bằng 0 có tổng khác 0. Có tồn tại điểm M sao cho $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (1.11)?

Lời giải: Ta có thể giả sử α, β có tổng khác 0, do đó tồn tại điểm I $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó vế trái của (1.11) có thể viết lại như sau: $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma.\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}+\gamma\overrightarrow{MC}$

Hệ thức trên cùng bài toán 2 cho ta câu trả lời cho bài toán 3.

Hơn nữa nếu A, B, C không thẳng hàng thì khi $\alpha + \beta + \gamma = 0$, không tồn tại M thỏa (1.11)

Trường hợp $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$ thì (1.11) tương đương với $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (1.12) khi đó M là trọng tâm của tam giác ABC

Bằng cách quy nạp ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 4: Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số thực $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 và có tổng khác 0. Khi đó tồn tại điểm M sao cho $\alpha_1.\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$ (1.132) (Điểm M được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ với các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$).

Chứng minh: (dành cho các bạn)

4. Bài tập chương vectơ

4.1 Các bài toán về phép cộng và phép trừ

Bài 1. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D. Dựng các vectơ tổng sau đây:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Bài 2. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Tính độ dài các vectơ: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Bài 3. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Bài 4. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Bài 5. Cho tứ giác MNPQ. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ}$

b) Gọi A, B, C, D lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, NP, PQ, QN. Chứng minh

1. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QA} = \vec{0}$

2. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Bài 6. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Điểm K là điểm đối xứng của M qua N. Chứng minh

a) $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Bài 7. Cho có vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Chứng minh rằng:

a) $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

b) $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Bài 8. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng nếu $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|$ thì $AC\perp BD$.

Bài 9. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$.

Bài 10. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chứng minh rằng $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\geq\left|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\right|$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 11. Tam giác ABC là tam giác gì nếu thỏa mãn:

a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.

4.2 Chứng minh các đẳng thức vectơ

Bài 1. Hai tam giác ABC và A'B'C có trọng tâm lần lượt là G và G'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$, từ đó suy ra điều kiện để hài tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 2. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF và FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng AB, BC, CA ta lấy các điểm tương ứng C', A', B' sao cho $\overrightarrow{AC'}=k.\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{CB'}=k\overrightarrow{B'A}$. Chứng minh rằng trọng tâm của hai tam giác ABC và A'B'C' trùng nhau.

Bài 4*. Cho tam giác ABC đều tâm O. M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, AC và AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Bài 5*. Cho tam giác ABC đều. M là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của M qua các cạnh BC, AC và AB. Chứng minh rằng hai tamg giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

Bài 6. Cho tam giác ABC. Gọi K là điểm đối xứng của B qua trọng tâm G. Chứng minh $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CK}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho NC = 2NA. Gọi K là trung điểm của MN.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

b) Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh $\overrightarrow{KD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Bài 8. Cho tam giác ABC. M thuộc cạnh BC sao cho MB = 2 MC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

4.3 Các áp dụng đơn giản của tâm tỉ cự

Bài 1. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn:

a) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}$

c) $-\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

Bài 3. Cho 3 điểm ABC. Chứng minh rằng các hệ thức sau không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

a) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$.

b) $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}$

Bài 4. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$

b) $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

Bài 5. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Bài 6. Cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Với mổi điểm N trên đường thẳng ta dựng điểm M theo công thức $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}$. Điểm M di chuyển trên đường nào khi N di động trên d.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Với mỗi điểm M bất kì ta dựng điểm P theo công thức: $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$. Tìm tập hợp điểm P khi M thay đổi trên:

a) Đường thẳng d

b) Đường tròn (O; R).

Bài 8. Cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 9. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Điểm M thay đổi trên d. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$

b) $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}\right|$.

Bài 10. Cho hai điểm A, B và đường tròn (O). Tìm điểm M trên (O) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bài 11. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Điểm M thay đổi trên d. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|+2\left|\overrightarrow{MC}\right|$

4.4 Biểu diễn một vectơ theo hai vectơ khác và ứng dụng

Bài 1. Cho 2 vectơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương, với mọi vectơ $\vec{c}$ bất kỳ tồn tại $x,y\in\mathbb{R}$ sao cho: $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Hơn nữa cặp số (x,y) là duy nhất.

Bài 2. Cho ΔABC, M là trung điểm BC.

a) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Lấy N thỏa $\overrightarrow{NB}=k\overrightarrow{NC}\,(k\neq 1)$, tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài 3. Cho ΔABC, trọng tâm G, gọi D là điểm đối xứng của A qua B và E là điểm trên cạnh AC sao cho $AE = \frac{2}{5}AC$

a) Tính $\overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{DG}$ theo $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh D, G, E thẳng hàng.

c) Gọi K thỏa $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{KD}$. Chứng minh KG, CD song song.

Bài 4. Cho ΔABC, I, J thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0};\ \overrightarrow{JC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JB}$. Tìm $F \in AC$ sao cho I, F, J thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm định bởi $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, I là trung điểm của DB. M là điểm thỏa: $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}\left(x \in \mathbb{R}\right)$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
b) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo x và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
c) Tìm x sao cho A, I, M thẳng hàng.

Bài 6. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai cạnh xiên AD và BC. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính $\overrightarrow{OI}$ theo $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.
b) Đặt $k = \frac{OD}{OA}$. Tính $\overrightarrow{OI}$ theo k, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Suy ra O, I, J thẳng hàng.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD. M, N là 2đi ểm lần lượt trên đoạn AB và CD sao cho $AB = 3AM, CD = 2CN$.

a) Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác MNB, tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
c) AG cắt đường thẳng BC tại I. Tính $\frac{BC}{BI}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng BC, CA, AB ta lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = k_1\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NC} = k_2\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{PA} = k_3\overrightarrow{PB}$. $\left(k_1, k_2, k_3 \neq 0, \pm 1\right)$

a) Tính $\overrightarrow{PM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
b) Tính $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
c) Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $k_1k_2k_3 = 1$

4.5 Chứng minh 3 điểm thẳng hàng và 3 đường thẳng đồng quy

Bài 1: Cho tứ giác ABCD, M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AB, CD và MN thẳng hàng.

Nếu điểm M, N thỏa AM/DM = BN/CN điều đó còn đúng không? Vì sao?

Bài 2*: Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M, N lần lượt trên các đoạn AC và AE sao cho AM/CM = EN/AN = k. Tìm k để B, M, N thẳng hàng.

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC. Chứng minh các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại G và G là trọng tâm của tứ giác.

Bài 4. Chứng minh rằng trong một tứ giác ngoại tiếp. Trung điểm hai đường chéo và tâm đường tròn nội tiếp cùng thuộc một đường thẳng (Đường thẳng Newtơn)

Bài 5. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng trung điểm BC, trung điểm AD và I thẳng hàng.

4.6 Định lý Ceva, định lý Menelaus và ứng dụng.

Bài 1. (**Định lý Menelaus và Ceva**). Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo các tỉ số lần lượt là là m, n, p (đều khác 1). Chứng minh rằng:

a) M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (Menelaus).

b) AN, CM, BP đồng qui hoặc song song khi và chỉ khi $mnp = -1$ (Ceva).

Sử dụng định lý Ceva và Menelaus giải các bài toán sau:

Bài 1. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) Nếu 3 điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng thì A_2, B_2, C_2 cũng thẳng hàng.

b) Nếu 3 đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui hoặc song song thì 3đư ờng thẳng AA_2, BB_2, CC_2 cũng đồng qui hoặc song song.

Bài 2. Cho tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Một đường thẳng d thay đổi luôn qua I, lần lượt cắt hai đường thẳng CA và CB tại A' và B'. Chứng minh rằng giao điểm M của AB' và A'B nằm trên đường thẳng cố định.

Bài 3. Cho điểm O nằm trong hình bình hành ABCD. Cácđư ờng thẳng đi qua O và song song với các cạnh của hình bình hành lần lượt cắt AB, BC, CD, DA tại M, N, P, Q. Gọi E là giao điểm của BQ và DM, F là giao điểm của BP và DN. Tìm điều kiện của điểm O để E, F, O thẳng hàng.

Hết.

Chúc các em làm bài tốt.

Bài kế tiếp: Trục tọa độ và hệ trục tọa độ.