CHƯƠNG II
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

1. Định nghĩa

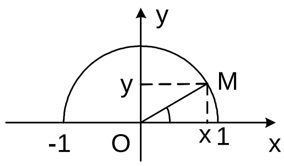
Lấy M trên nửa đường tròn đơn vị tâm O. Xét góc nhọn $\alpha = \widehat{xOM}$. Giả sử M(x; y).

$\sin\alpha = y$ (tung độ)

$\cos\alpha = x$ (hoành độ)

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{\text{tung độ}}{\text{hoành độ}}\right)$ $(x \neq 0)$

$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{\text{hoành độ}}{\text{tung độ}}\right)$ $(y \neq 0)$



Chú ý: *– Nếu α tù thì $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.*

– $\tan\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^0$, $\cot\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^0$ và $\alpha \neq 180^0$.

2. Tính chất

• Góc phụ nhau

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha$

$\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha$

• Góc bù nhau

$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	0
$\cot\alpha$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\|$

4. Các hệ thức cơ bản

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$ $(\sin\alpha.\cos\alpha \neq 0)$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$

Chú ý: $0 \le \sin\alpha \le 1$; $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $a\sin 0^0 + b\cos 0^0 + c\sin 90^0$

b) $a\cos 90^0 + b\sin 90^0 + c\sin 180^0$

c) $a^2\sin 90^0 + b^2\cos 90^0 + c^2\cos 180^0$

d) $3 - \sin^2 90^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\tan^2 45^0$

e) $4a^2\sin^2 45^0 - 3(a\tan 45^0)^2 + (2a\cos 45^0)^2$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin x + \cos x$ khi x bằng 0^0; 45^0; 60^0.

b) $2\sin x + \cos 2x$ khi x bằng 45^0; 30^0.

Bài 3. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại:

a) $\sin\beta = \frac{1}{4}$, β nhọn.

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

c) $\tan x = 2\sqrt{2}$

Bài 4. Biết $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Tính $\cos 15^0$, $\tan 15^0$, $\cot 15^0$.

Bài 5. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính giá trị của một biểu thức:

a) $\sin x = \frac{1}{3}$, $90^0 < x < 180^0$. Tính $A = \frac{\tan x + 3\cot x + 1}{\tan x + \cot x}$.

b) $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha}$

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x$

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$

d) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x$

e) $\sin x.\cos x(1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2\sin x.\cos x$

Bài 7. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\cos y + \sin y.\tan y$

b) $\sqrt{1+\cos b}.\sqrt{1-\cos b}$

c) $\sin a\sqrt{1+\tan^2 a}$

d) $\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} + \tan x.\cot x$

e) $\frac{1-4\sin^2 x.\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$

f) $\sin(90^0 - x) + \cos(180^0 - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

Bài 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$

b) $\sin^2 3^0 + \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 + \sin^2 87^0$

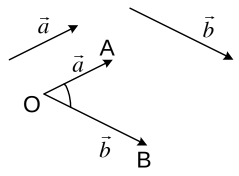
Bài 9.

a)

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



Khi đó $\boxed{(\vec{a},\vec{b})=\widehat{AOB}}$ với $0^0\leq\widehat{AOB}\leq 180^0$.

Chú ý:

+ $(\vec{a},\vec{b})=90^0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

+ $(\vec{a},\vec{b})=0^0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ *cùng hướng*

+ $(\vec{a},\vec{b})=180^0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ *ngược hướng*

+ $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$

2. Tích vô hướng của hai vectơ

- Định nghĩa: $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})}$.

  Đặc biệt: $\vec{a}.\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

- Tính chất: Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bất kì và $\forall k\in R$, ta có:

  + $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$; $\quad\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$;

  $(k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(k\vec{b})$; $\quad\vec{a}^2\geq 0;\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$.

  + $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$; $\quad(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;

  $\vec{a}^2-\vec{b}^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$.

  + $\vec{a}.\vec{b}>0\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})$ nhọn $\quad$ + $\vec{a}.\vec{b}<0\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})$ tù

  $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})$ vuông.

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

- Cho $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$. Khi đó: $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$.
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$; $\quad\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$; $\quad\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$
- Cho $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. Khi đó: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\quad$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ $\quad$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Bài 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\quad$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ $\quad$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0$.

b) Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Bài 4. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh:

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}=0.$$

Bài 5. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

Bài 6. Cho tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, AC = 8.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b) Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho CD = 3. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$ c) $(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ e) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$

HD: a) a^2 b) a^2 c) $2a^2$ d) $-a^2$ e) 0

Bài 8. Cho tam giác ABC có AB = 2, BC = 4, CA = 3.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra cosA.

b) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$.

c) Tính giá trị biểu thức S = $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$.

d) Gọi AD là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ (D ∈ BC). Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$, suy ra AD.

HD: a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$, $\cos A=-\frac{1}{4}$ b) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}$ c) $S=-\frac{29}{6}$

d) Sử dụng tính chất đường phân giác $\overrightarrow{DB}=\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $AD=\frac{\sqrt{54}}{5}$

Bài 9. Cho tam giác ABC có AB = 2, AC = 3, A = 60^0. M là trung điểm của BC.

a) Tính BC, AM.

b) Tính IJ, trong đó I, J được xác định bởi: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JC}$.

HD: a) BC = $\sqrt{19}$, AM = $\frac{\sqrt{7}}{2}$ b) IJ = $\frac{2}{3}\sqrt{133}$

Bài 10. Cho tứ giác ABCD.

a) Chứng minh $AB^2-BC^2+CD^2-DA^2=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

b) Suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc là:

$$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

Bài 11. Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm của BC. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}BC^2.$$

Bài 12. Cho hình chữ nhật ABCD, M là một điểm bất kì. Chứng minh:

a) $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

c) $MA^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$ (O là tâm của hình chữ nhật).

Bài 13. Cho tam giác ABC có A(1; –1), B(5; –3), C(2; 0).

a) Tính chu vi và nhận dạng tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm M biết $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

c) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 14. Cho tam giác ABC có A(1; 2), B(–2; 6), C(9; 8).

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.

e) Tìm toạ độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.

f) Tìm toạ độ điểm N trên Ox để tam giác ANC cân tại N.

g) Tìm toạ độ điểm D để ABDC là hình chữ nhật.

h) Tìm toạ độ điểm K trên Ox để AOKB là hình thang đáy AO.

i) Tìm toạ độ điểm T thoả $\overrightarrow{TA}+2\overrightarrow{TB}-3\overrightarrow{TC}=\vec{0}$

k) Tìm toạ độ điểm E đối xứng với A qua B.

l) Tìm toạ độ điểm I chân đường phân giác trong tại đỉnh C của ΔABC.

Bài 15. Cho tam giác ABC. tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $MA^2 = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ b) $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$

c) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$ d) $2MA^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

Bài 16. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=a^2$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=5a^2$

c) $MA^2+MB^2+MC^2=3MD^2$ d) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=3a^2$

Bài 17. Cho tứ giác ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}IJ^2$.

Bài 18.

a)

III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Cho ΔABC có: – độ dài các cạnh: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

– độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C: m_a, m_b, m_c
– độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C: h_a, h_b, h_c
– bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r
– nửa chu vi tam giác: p
– diện tích tam giác: S

1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A; \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

2. Định lí sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}; \quad m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

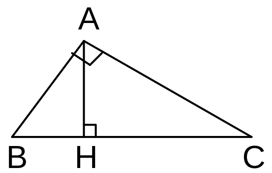
4. Diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$= \frac{abc}{4R}$$
$$= pr$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (công thức Hê–rông)

Giải tam giác *là tính các cạnh và các góc của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.*

5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông *(nhắc lại)*

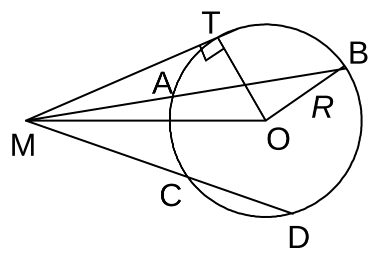
Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao.



- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Pi–ta–go)
- $AB^2 = BC.BH$, $\quad AC^2 = BC.CH$
- $AH^2 = BH.CH$, $\quad \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $AH.BC = AB.AC$
- $b = a.\sin B = a.\cos C = c\tan B = c\cot C$; $\quad c = a.\sin C = a.\cos B = b\tan C = b\cot C$

6. Hệ thức lượng trong đường tròn *(bổ sung)*

Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định.



- Từ M vẽ hai cát tuyến MAB, MCD.

$$P_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$$

- Nếu M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT.

$$P_{M/(O)} = MT^2 = MO^2 - R^2$$

Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$ b) $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$

c) $h_a = 2R\sin B\sin C$ d) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

e) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Bài 2. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $b + c = 2a$ thì $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

b) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B \sin C = \sin^2 A$, $h_b h_c = h_a^2$

c) A vuông $\Leftrightarrow$ $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$

Bài 3. Cho tứ giác lồi ABCD, gọi α là góc hợp bởi hai đường chép AC và BD.

a) Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

b) Nêu kết quả trong trường hợp tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Bài 4. Cho ΔABC vuông ở A, BC = a, đường cao AH.

a) Chứng minh $AH = a.\sin B.\cos B$, $BH = a.\cos^2 B$, $CH = a.\sin^2 B$.

b) Từ đó suy ra $AB^2 = BC.BH$, $AH^2 = BH.HC$.

Bài 5. Cho ΔAOB cân đỉnh O, OH và OK là các đường cao. Đặt OA = a, $\widehat{AOH} = \alpha$.

a) Tính các cạnh của ΔOAK theo a và α.

b) Tính các cạnh của các tam giác OHA và AKB theo a và α.

c) Từ đó tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ theo $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$.

Bài 6. Giải tam giác ABC, biết:

a) $c = 14$; $\widehat{A} = 60^0$; $\widehat{B} = 40^0$

b) $b = 4,5$; $\widehat{A} = 30^0$; $\widehat{C} = 75^0$

c) $c = 35$; $\widehat{A} = 40^0$; $\widehat{C} = 120^0$

d) $a = 137,5$; $\widehat{B} = 83^0$; $\widehat{C} = 57^0$

Bài 7. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\widehat{C} = 54^0$

b) $b = 32$; $c = 45$; $\widehat{A} = 87^0$

c) $a = 7$; $b = 23$; $\widehat{C} = 130^0$

d) $b = 14$; $c = 10$; $\widehat{A} = 145^0$

Bài 8. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$

b) $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$

c) $a = 4$; $b = 5$; $c = 7$

d) $a = 2\sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

Bài 9.

a)

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{2}{\sin x}$ b) $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}=1-\sin x.\cos x$

c) $\left(\dfrac{\tan^2 x-1}{2\tan x}\right)^2-\dfrac{1}{4\sin^2 x.\cos^2 x}=-1$ d) $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x}=1+\tan^2 x$

e) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x(1+\tan x)}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x(1+\cot x)}=\sin x-\cos x$

f) $\left(\tan x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right).\left(\cot x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)=\dfrac{1}{\sin x.\cos x}$

g) $\cos^2 x(\cos^2 x+2\sin^2 x+\sin^2 x\tan^2 x)=1$

Bài 2. Biết $\sin 18^0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Tính $\cos 18^0$, $\sin 72^0$, $\sin 162^0$, $\cos 162^0$, $\sin 108^0$, $\cos 108^0$, $\tan 72^0$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) A = $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x$ b) B = $\sin^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$

Bài 4. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

a) Tính góc $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, biết $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=5\vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc.

b) Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, biết $\left|\vec{a}\right|=11$, $\left|\vec{b}\right|=23$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=30$.

c) Tính góc $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, biết $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$, $(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$.

d) Tính $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, $\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|$, biết $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $(\vec{a},\vec{b})=120^0$.

e) Tính $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$, biết $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$, $(2\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}+3\vec{b})$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB = 3, AC = 4, BC = 6.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và cosA.

b) M, N là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Tính MN.

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD có AB = $\sqrt{3}$, AD = 1, $\widehat{BAD}=60^0$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài hai đường chéo AC và BD. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh AI ⊥ DE.

Bài 8. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh HK ⊥ IJ.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, M là trung điểm cạnh AB. Trên đường chéo AC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

a) Chứng minh DN vuông góc với MN.

b) Tính tổng $\overrightarrow{DN}.\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CB}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}=0$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}=0$

c) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=0$ d) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$

Bài 11. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

a) $b^2-c^2=a(b.\cos C-c.\cos B)$ b) $(b^2-c^2)\cos A=a(c.\cos C-b.\cos B)$

b) $\sin A=\sin B.\cos C+\sin C.\cos B=\sin(B+C)$

Bài 12. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ thì $\widehat{A}=60^0$.

b) Nếu $\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2$ thì $\widehat{A}=60^0$.

c) Nếu $\cos(A+C)+3\cos B=1$ thì $\widehat{B}=60^0$.

d) Nếu $b(b^2-a^2)=c(a^2-c^2)$ thì $\widehat{A}=60^0$.

Bài 13. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\dfrac{b^2-a^2}{2c}=b\cos A-a\cos B$ thì ΔABC cân đỉnh C.

b) Nếu $\dfrac{\sin B}{\sin C}=2\cos A$ thì ΔABC cân đỉnh B.

c) Nếu $a=2b.\cos C$ thì ΔABC cân đỉnh A.

d) Nếu $\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{a}{\sin B.\sin C}$ thì ΔABC vuông tại A.

e) Nếu $S=2R^2\sin B.\sin C$ thì ΔABC vuông tại A.

Bài 14. Cho ΔABC. Chứng minh điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau là: $b^2+c^2=5a^2$.

Bài 15. Cho ΔABC.

a) Có a = 5, b = 6, c = 3. Trên các đoạn AB, BC lần lượt lấy các điểm M, K sao cho BM = 2, BK = 2. Tính MK.

b) Có $\cos A=\dfrac{5}{9}$, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{ABC}=\widehat{DAC}$, DA = 6, $BD=\dfrac{16}{3}$. Tính chu vi tam giác ABC.

HD: *a) MK =* $\dfrac{8\sqrt{30}}{15}$ *b) AC = 5, BC =* $\dfrac{25}{3}$*, AB = 10*

Bài 16. Cho một tam giác có độ dài các cạnh là: x^2+x+1; $2x+1$; x^2-1.

a) Tìm x để tồn tại một tam giác như trên.

b) Khi đó chứng minh tam giác ấy có một góc bằng 120^0.

Bài 17. Cho ΔABC có $\widehat{B}<90^0$, AQ và CP là các đường cao, $S_{\Delta ABC}=9S_{\Delta BPQ}$.

a) Tính cosB.

b) Cho PQ = $2\sqrt{2}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

HD: *a)* $\cos B=\dfrac{1}{3}$ *b)* $R=\dfrac{9}{2}$

Bài 18. Cho ΔABC.

a) Có $\widehat{B}=60^0$, R = 2, I là tâm đường tròn nội tiếp. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔACI.

b) Có $\widehat{A}=90^0$, AB = 3, AC = 4, M là trung điểm của AC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBCM.

c) Có a = 4, b = 3, c = 2, M là trung điểm của AB. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔBCM.

HD: *a) R = 2* *b)* $R=\dfrac{5\sqrt{13}}{6}$ *c)* $R=\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{23}{30}}$

Bài 19. Cho hai đường tròn (O_1, R) và (O_2, r) cắt nhau tại hai điểm A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại C và D. Gọi N là giao điểm của AB và CD (B nằm giữa

A và N). Đặt $\widehat{AO_1C} = \alpha$, $\widehat{AO_2D} = \beta$.

a) Tính AC theo R và α; AD theo r và β.

b) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

HD: *a)* $AC = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, $AD = 2r\sin\frac{\beta}{2}$ *b)* $\sqrt{Rr}$.

Bài 20. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AC, BD = a, $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CAD} = \beta$.

a) Tính AC. b) Tính diện tích tứ giác ABCD theo a, α, β.

HD: *a)* $AC = \dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$ *b)* $S = \dfrac{a^2\cos(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Bài 21. Cho ΔABC cân đỉnh A, $\widehat{A} = \alpha$, AB = *m*, D là một điểm trên cạnh BC sao cho BC = 3BD.

a) Tính BC, AD.

b) Chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD là bằng nhau. Tính cosα để bán kính của chúng bằng $\frac{1}{2}$ bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

HD: *a)* $BC = 2m\sin\frac{\alpha}{2}$, $AD = \frac{m}{3}\sqrt{5+4\cos\alpha}$ *b)* $\cos\alpha = -\frac{11}{16}$.

Bài 22.

a)