BÀI TẬP HÌNH HỌC PHẲNG

Bài 1:

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C bất kì ($C \neq A$). Từ C kẻ tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (O), M và N là tiếp điểm. Các đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường tròn (O') tại P và Q ($P \neq A, Q \neq A$). Đường thẳng MN cắt đường thẳng PQ tại điểm I.

1) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng PQ
2) Các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau ở D. Chứng minh ba điểm D, M và N thẳng hàng
3) Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C thay đổi.

Bài 2:

Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung BC cố định $0 < BC < 2R$. Trên cung lớn BC của đường tròn (O) lấy điểm A bất kỳ sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AB < AC. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B, C tới các cạnh BC, CA, AB. Ba đường thẳng AD, BE và CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm của BC; S là giao điểm của EF, BC.

1) Chứng minh đường thẳng MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, SDF và SH vuông góc với AM
2) Xác định vị trí của điểm A để chu vi tam giác DEF đạt giá trị lớn nhất
3) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SPQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3:

Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung BC cố định $0 < BC < 2R$. M là điểm thay đổi trên cung nhỏ BC của đường tròn (O), M không trùng với B, C. Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại A. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đoạn thẳng BC, CA, AB. Đường thẳng MB cắt đường thẳng DF tại P; đường thẳng MC cắt đường thẳng DE tại Q.

1) Chứng minh PQ song song với BC
2) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác MPF và MQE. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O)
3) Xác định vị trí của điểm M để biểu thức $\dfrac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{MD.ME.MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4:

Cho đường tròn (O;R) có AB là đường kính cố định và MN là đường kính thay đổi (MN khác AB). Qua B kẻ tiếp tuyến d của (O) cắt AM, AN lần lượt tại C và D. Gọi I là giao điểm của OC và BM . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) và đường thẳng d theo thứ tự tại E, F ($E \neq A$)

1) Xác định vị trí của MN để diện tích tam giác ACD nhỏ nhất
2) Chứng minh N, E, C thẳng hàng
3) Đường thẳng MD cắt (O) tại điểm thứ hai P, AP cắt d tại Q. Chứng minh B là trung điểm của đoạn thẳng QF
4) Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD. Chứng minh điểm H di động trên một đường thẳng cố định khi MN thay đổi.

Bài 5:

Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Gọi H là một điểm bất kỳ trên đoạn OA (H khác hai điểm O, A). Dựng đường thẳng d vuông góc với OA tại H. Trên d lấy điểm C ở ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (O); M và N là tiếp điểm, M cùng phía với A bờ CH. Các đường thẳng CM, CN cắt đường thẳng AB tại P và Q. Đường thẳng qua O và vuông góc với AB cắt MN tại K. CK cắt AB tại I. Chứng minh rằng:

1) HC là tia phân giác của góc MHN

2) I là trung điểm của đoạn thẳng PQ
3) Ba đường thẳng PN, QM và CH đồng quy.

Bài 6:

Cho đường tròn tâm O đường kính AB=2R. Từ điểm C bất kì trên đường tròn kẻ CH vuông góc với AB tại H. Vẽ đường tròn tâm C bán kính CH cắt (O) lần lượt tại D và E. Đường thẳng DE cắt CH tại I. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại M. Chứng minh rằng:

1) I là trung điểm của đoạn thẳng CH
2) Các đường thẳng BM, CH, DE đồng quy
3) Đường thẳng DE cắt các cạnh BC và CA tại P và Q. Xác định vị trí của điểm C trên đường tròn (O) để bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAPQ lớn nhất.

Bài 7:

Cho tam giác ABC và J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác. Đường tròn này tiếp xúc với AB, AC và BC tại K, L và M. Đường thẳng ML cắt BJ tại F, đường thẳng KM cắt CJ tại G. Gọi S là giao điểm của AF và BC, T là giao điểm của AG và BC. Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng ST.

Bài 8:

Cho tam giác ABC vuông tại C. Gọi D là chân đường cao kẻ từ C tới AB và X là điểm nằm trong đoạn thẳng CD. Gọi K là điểm trên đoạn thẳng AX sao cho BK = BC, L là điểm trên đoạn thẳng BX sao cho AL = AC, M là giao điểm của hai đường thẳng AL và BK. Chứng minh rằng: MK = ML.

Bài 9:

Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung BC cố định khác đường kính, A là điểm bất kì di động trên đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AH cắt BC tại D. Đường phân giác ngoài góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh tam giác AMN cân
2) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên BH và CH. Chứng minh rằng OA vuông góc với EF
3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O).

Bài 10:

Cho tam giác ABC (AB < BC, AB < AC) ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của (O) với các đoạn thẳng AC, AB. Đường thẳng MN cắt AO, BO tại P và Q. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng:

1) Các tứ giác AOQM, BOPN, AQPB nội tiếp được trong đường tròn
2) Ba điểm E, F, Q thẳng hàng
3) $\dfrac{MP+NQ+PQ}{AB+AC+BC}=\dfrac{OM}{OC}$.

Bài 11:

Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) cắt nhau tại A và B (R > r). Trên nửa mặt phẳng bờ OO' có chứa điểm B, vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O) và (O') tại C, D cắt OO' tại E. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt (O) và (O') tại M và N. Các đường thẳng BC, BD lần lượt cắt MN tại P, Q. Gọi F là giao điểm của đường thẳng CM và DN. Chứng minh rằng:

1) CD vuông góc với AF

2) Tam giác FPQ là tam giác cân
3) EB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Bài 12:

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở N. Vẽ đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại M. Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng MN và đường tròn (O). Chứng minh rằng:

1) Tứ giác ABCM là hình thang cân
2) AB.BP = AC.CP
3) Các đường thẳng AP, BC, ON đồng quy.

Bài 13:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC (M khác B, C). Gọi N, P, Q lần lượt là điểm đối xứng của M qua BC, AB, AC; H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng MN, MP, MQ lần lượt cắt BC, AB, AC tại các điểm J, K và T.

1) Chứng minh ba điểm J, K, T thẳng hàng
2) Xác định vị trí của M để PQ có độ dài lớn nhất
3) Chứng minh KT đi qua trung điểm của đoạn thẳng HM.
4) Chứng minh: $\frac{BC}{MJ} = \frac{AB}{MK} + \frac{AC}{MT}$.

Bài 14:

Cho tam giác nhọn ABC và điểm D di động trên cạnh BC (D khác B, C). Gọi M, N lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD.

1) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định khác A
2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Xác định vị trí của điểm D để đoạn thẳng IO có độ dài nhỏ nhất.

Bài 15:

Cho tam giác ABC, AD là đường phân giác trong góc ABC, D thuộc cạnh BC. Trên đoạn AD lấy hai điểm M, N sao cho hai góc ABN và CBM có số đo bằng nhau. BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E; CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng:

1) BCEF là tứ giác nội tiếp
2) Ba điểm A, E, F thẳng hàng
3) $\angle ACN = \angle BCM$.

Bài 16:

Cho tam giác ABC có góc B nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Trên cung nhỏ AC của (O) lấy điểm M khác A, C. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, AB; N là giao điểm DE và AC.

1) Chứng minh MN vuông góc với AC
2) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, S là giao điểm của DE và đường tròn ngoại tiếp tam giác IME. Chứng minh SN = SD
3) Đường tròn (H; r) nội tiếp tam giác ABC. Biết R = 5cm; r = 2cm. Tính độ dài đoạn OH.

Bài 17:

Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O), B và C là các tiếp điểm. Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm M sao cho M khác B, C và điểm chính giữa của cung nhỏ BC. AM cắt (O) tại điểm thứ hai N. Gọi I là trung điểm của MN, H là giao điểm của AO và BC, E là giao điểm của MN và BC.

1) Chứng minh rằng AM.AN = AI.AE
2) Gọi P và Q là giao điểm của đường thẳng AO và đường tròn (O), Q nằm giữa A và P. Chứng minh MNPQ là tứ giác nội tiếp
3) Chứng minh hai tiếp tuyến của (O) tại M, N và các đường thẳng BC, OI cùng đi qua một điểm.

Bài 18:

Cho hình vuông ABCD cạnh 1 và điểm M ở trong nó. Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2$.

Bài 19:

Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Bán kính CO vuông góc AB, M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A, C). Đường thẳng BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho BE = AM.

1) Chứng minh tam giác ECM vuông cân
2) Đường thẳng AM cắt BC tại điểm I. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIH chạy trên một đường thẳng cố định khi điểm M thay đổi trên cung nhỏ AC
3) Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh rằng đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Bài 20:

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của CB (A khác C). Kẻ tiếp tuyến AF với nửa đường tròn (F là tiếp điểm). Đường thẳng AF cắt tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn (O) tại D (Bx nằm trong mặt phẳng bờ BC chứa nửa đường tròn). Gọi H là giao điểm của BF và DO; K là giao điểm thứ hai của DC với nửa đường tròn (O).

1) Chứng minh rằng KHOC là tứ giác nội tiếp
2) Đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt AD tại điểm M. Chứng minh $\dfrac{BD}{DM} - \dfrac{DM}{AM} = 1$.

Bài 21:

Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định. M là điểm chuyển động trên đường tròn (M khác A, B) sao cho tiếp tuyến tại A và M của (O) cắt nhau tại C. Vẽ đường tròn tâm I qua M và tiếp xúc AC tại C. Kẻ đường kính CD của (I). Chứng minh rằng:

1) Tam giác OCD là tam giác cân
2) Đường thẳng qua D và vuông góc với BC luôn đi qua điểm cố định.

Bài 22:

Cho A là một điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn, B và C là tiếp điểm. Một đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt (O) tại hai điểm phân biệt D, E (D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của đoạn DE; M là giao điểm thứ hai của đường thẳng CI với đường tròn (O).

1) Chứng minh rằng bốn điểm B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn

2) Chứng minh rằng tứ giác DEMB là hình thang cân
3) Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tam giác AME lớn nhất.

Bài 23:

Cho đường tròn (O; R) và hai điểm A, B nằm ngoài đường tròn sao cho OA = a.R (a là hằng số dương). Tìm vị trí điểm M trên đường tròn để tổng MA + a.MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 24:

Cho đường tròn (O) và một điểm S nằm ngoài (O). Đường thẳng SO cắt đường tròn (O) tại E và F (SE < SF). Vẽ cát tuyến SAB và tiếp tuyến ST với (O); T là tiếp điểm, A nằm giữa S và B, A và T khác phía với SO. Gọi H là hình chiếu vuông góc của T trên SO. Trên một nửa mặt phẳng bờ SO có chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính SF, nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K. Đường thẳng OT cắt KF tại G.

1) Chứng minh AHOB là tứ giác nội tiếp
2) Chứng minh SG vuông góc với KT
3) Gọi M, N lần lượt là tâm đương tròn ngoại tiếp các tam giác EFG và ABG; I là trung điểm của KG. Chứng minh ba điểm M, N, I thẳng hàng.

Bài 25:

Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C di chuyển trên đường tròn này sao cho C khác A, B và điểm chính giữa của cung AB. Gọi H là hình chiếu của C trên AB; E, F là hình chiếu của H trên CA, CB.

1) Chứng minh tứ giác AEFC nội tiếp đường tròn (I). Kẻ đường kính CD của (O). Chứng minh D, H, I thẳng hàng
2) Gọi P là giao điểm của các đường thẳng AB và EF, Q là giao điểm thứ hai của PC với (O). Chứng minh QE vuông góc với QF
3) Xác định vị trí của điểm C để độ dài đường tròn (I) đạt giá trị lớn nhất.

Bài 26:

Cho đường tròn (O) đường kính BC, M là điểm tùy ý nằm trên đoạn OB (M khác O, B).Trên đường thẳng d vuông góc với BC tại M lấy điểm A ở ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ với đường tròn (O), P và Q là các tiếp điểm. Đường thẳng PQ cắt BC tại N. Chứng minh rằng:

1) $\frac{PH}{PN}=\frac{QH}{QN}$
2) Ba điểm H, P, Q thẳng hàng
3) Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng AB, AC với đường tròn (O). Chứng minh các đường thẳng BC, EF và PQ cùng đi qua một điểm.

Bài 27:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của góc BAC cắt (O) tại điểm thứ hai M. Tiếp tuyến kẻ từ M của (O) cắt tia AB, AC tại D, E.

1) Chứng minh rằng $\Delta AMB \sim \Delta MEC, \Delta AMC \sim \Delta MDB$
2) Giả sử AC = CE. Chứng minh rằng $AM^2 = MD.ME$
3) Chứng minh AB.CD + AC.BD = AD.BC
4) Chứng minh rằng $AB + AC < 2AM$.

Bài 28:

Cho đường tròn (O; R) và dây BC cố định. A là điểm di động trên (O) sao cho ΔABC nhọn. Gọi H là trực tâm của ΔABC. Xác định vị trí của điểm A để tổng (HA + HB + HC) lớn nhất.

Bài 29:

Đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại điểm C, đường tròn (O) tiếp xúc ngoài với cả hai đường tròn trên. Gọi d là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) tại điểm C và AB là đường kính của (O) vuông góc với đường thẳng d. Giả sử O và A cùng nằm về của đường thẳng d. Chứng minh rằng AO_1, BO_2 và d đồng quy.

Bài 30:

Gọi F là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD và ACE vuông cân tại D và E. Chứng minh rằng tam giác DEF là một tam giác vuông cân.

Bài 31:

Cho ABC là một tam giác nhọn và D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ đỉnhA, B, C. Gọi P, Q, R tương ứng là chân cá đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến EF, FD, DE. Chứng minh rằng các đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy.

Bài 32:

1) Trong các tam giác có một cạnh độ dài *a* và diện tích *S* cho trước. Tìm tất cả cá tam giác có tích độ dài ba đường cao lớn nhất.
2) Cho đường tròn *C* và một điểm A ở ngoài *C*. Với mỗi điểm P trên *C* dựng hình vuông APQR, thứ tự các đỉnh ngược chiều kim đồng hồ. Tìm quỹ tích của Q khi điểm P chạy trên đường tròn *C*.

Bài 33:

Cho tứ giác lồi ABCD có ∠ABC + ∠BCD < 180°. E là giao điểm của đường thẳng AB và CD. Chứng minh rằng ∠ABC = ∠ADC khi và chỉ khi $AC^2 = CD.CE + AB.AE$

Bài 34:

Tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Đường thẳng AB và CD giao nhau tại E, đường chéo AC và BD giao nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC giao nhau tại điểm thứ hai H. Chứng minh rằng góc EHF vuông.

Bài 35:

Tam giác ABC cân tại A. Giả sử đường phân giác của góc B cắt AC tại D và BC = BD + AD. Xác định góc A.

Bài 36:

Cho tam giác ABC và các điểm K, L, M tương ứng trên các cạnh AB, BC, CA sao cho $\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}$. Chứng tỏ rằng nếu các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AKM, BLK, CML bằng nhau thì các đường tròn nội tiếp các tam giác này cũng bằng nhau.

Bài 37:

Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABED, BCGF, ACHI. Chứng minh rằng các điểm D, E, F, G, H, I cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi tam giác ABC đều hoặc vuông cân.

Bài 38:

Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, Z, H, O lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AD, BD, ED, EZ. Gọi I là giao điểm của BE và AC, K là giao điểm của HO và AC. Chứng minh rằng:

1) AK = 3CK

2) HK = 3HO
3) BE= 3EI
4) $S_{ABC} = 32S_{EOH}$

Bài 39:

Tam giác ABC có góc A bằng 60°. Gọi O, H, I, I' là tâm đương tròn ngoại tiếp, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Gọi B', C' là các điểm trên đoạn AC, AB thỏa mãn AB = AB', AC = AC'. Chứng minh rằng:

1) Tám điểm B, C, H, O, I, I', B', C' cùng nằm trên một đường tròn
2) Nếu OH cắt AB và AC lần lượt tại E và F thì chu vi tam giác AEF bằng AB + AC
3) OH = $|AB - AC|$.

Bài 40:

Giả sử ABC là một tam giác không cân. Các trung tuyến kẻ từ A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại điểm thứ hai L, M, N. Nếu LM = LN, chứng tỏ rằng $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài 41:

Cho tam giác ABC và một điểm P nằm trong tam giác sao cho góc PBC = góc PCA < góc PAB. Đường thẳng PB cắt (ABC) tại B và E, đường thẳng CE cắt (APE) tại E và F. Hãy chứng tỏ rằng $\frac{S_{APEF}}{S_{APB}}$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm P.

Bài 42:

Trong tam giác cân ABC (AC = BC) điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp; D là điểm trên BC sao cho đường thẳng OD và BI vuông góc. Chứng minh rằng ID và AC song song.

Bài 43:

Cho tam giác ABC có điểm P nằm trong sao cho ∠PAB=10°, ∠PBA=20°, ∠PCA=30° và ∠PAC=40°. Chứng minh tam giác ABC cân.

Bài 44:

Trong một hình bình hành ABCD với góc A nhọn, đường tròn đường kình AC cắt đường thẳng CB và CD lần thứ hai tại E và F tương ứng, tiếp tuyến với đường tròn này tại A cắt BD tại P. Hãy chứng tỏ rằng P, E, F thẳng hàng.

Bài 45(VMO2003):

Tronh mặt phẳng, cho hai đường tròn cố định $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ với $R_1 > R_2$ tiếp xúc trong tại điểm M. Xét điểm A nằm trên đường tròn $(O_2;R_2)$ sao cho ba điểm A, O_1, O_2 không thẳng hàng. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn $(O_1;R_1)$, (B, C là tiếp điểm). Các đường thẳng MB và MC lần thứ hai cắt $(O_2;R_2)$ tương ứng tại các điểm E, F. Gọi D là giao điểm của đường thẳng EF và tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O_2;R_2)$. Chứng minh rằng điểm D di động trên một đường thẳng cố định khi A di động trên đường tròn $(O_2;R_2)$ sao cho ba điểm A, O_1, O_2 không thẳng hàng.

Bài 46:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M thay đổi trên cung BC không chứa A của đường tròn (O), M khác B và C. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM và ACM. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 47:

Cho tam giác nhọn ABC với AD, AE, AF là các đường cao và H là trực tâm. Đường phân giác trong và ngoài của góc BAC cắt đường thẳng BC tại I, O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH.

1) Chứng minh MN vuông góc với EF
2) Giả sử MN cắt AI, AO tại P, Q. Chứng minh PQ = AH.

Bài 48:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Kí hiệu S là đường tròn đi qua A, B, O. Đường thẳng CA, CB cắt S tại điểm thứ hai P và Q. Chứng minh hai đường thẳng CO và PQ vuông góc với nhau.

Bài 49:

Hai đường tròn O, O’ tiếp xúc ngoài với nhau tại K, cùng tiếp xúc với đường tròn S tại A, A’. Gọi P là một giao điểm của S với tiếp tuyến chung của O và O’ tại K. Đường thẳng PA cắt O lần thứ hai tại B và PA’ cắt O’ lần thứ hai tại B’. Chứng minh rằng BB’ tiếp xúc với O và O’.

Bài 50:

Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu AB + GC = AC + GB thì tam giác ABC cân.

Bài 51:

Trong tam giác ABC có vẽ đường phân giác CD (AB = CD). Đường thẳng qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với CD cắt BC tại E. Đường thẳng qua E song song với CD cắt AB tại F. Chứng minh BE = FD.

Bài 52:

Cho hai điểm E, F trên cạnh BC của tứ giác lồi ABCD (E gần B hơn F). Biết rằng $\angle BAE = \angle CDF$ và $\angle EAF = \angle FDE$. Chứng minh rằng: $\angle FAC = \angle EDB$.

Bài 53:

Cho hình thang ABCD có đáy lớn BC và nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là một điểm thay đổi trên đường thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC sao cho PA không là tiếp tuyến của đường tròn (O). Đường tròn đường kính PD cắt (O) tại E ($E \neq D$). Gọi M là giao điểm BC với DE, N là giao điểm khác A của PA với (O). Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

Bài 54:

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc trong tại K, (R > R’). Gọi A là điểm thuộc đường tròn (O) sao cho A, O, O’ không thẳng hàng. Vẽ các tiếp tuyến AD, AE tới (O’) (D, E là các tiếp điểm) cắt (O) tại B và C. AO’ cắt (O) tại F. Chứng minh rằng ba đường thẳng KF, BC, DE đồng quy.

Bài 55:

Cho đường tròn (O) và điểm P nằm ngoài đường tròn. Qua P kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với (O). Gọi C là một điểm bất kì trên cung nhỏ AB. AC cắt PB tại D, BC cắt PA tại E. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACE, BCD và POC cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 56:

Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc BAC tại E nằm trong tam giác ABC. Đường tròn ngoại tếp tam giác ABE giao với BD tại F khác B, AF giao với BE tại I, CI giao với BD tại K. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

Bài 57:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kì trên đường thẳng BC (P khác B, C). Đường tròn (O) cắt đường thẳng AP tại N và cắt đường tròn đường kính AP ở E (N, E khác A). Gọi M là giao điểm của BC và AE. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 58:

Cho tam giác ABC không vuông tại A (AB < AC) có đường trung tuyến AM. Gọi D là một điểm di động trên đường thẳng AM. Gọi (O_1) và (O_2) là các đường tròn đi qua D tiếp xúc với BC lần lượt tại B, C. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn (O_1), đường thẳng AC với đường tròn (O_2). Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của (O_1) , tiếp tuyến tại Q của (O_2) và đường thẳng AM đồng quy.

Bài 59(APMO2013):

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), và P là điểm bất kỳ trên tia AC sao cho PB, PD là tiếp tuyến của (O). Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng PD tại Q và cắt đường thẳng AD tại R. Gọi E là giao điểm của AQ với (O). Chứng minh rằng B, E, R thẳng hàng.

Bài 60(VNTST2012):

Trên mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C trên đường tròn này sao cho BC không là đường kính của (O). Gọi A là một điểm di động trên đường tròn (O) và A không trùng với hai điểm B, C. Gọi D, K, J lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và E, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, DJ, DK. Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M, N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN luôn cắt nhau tại điểm T cố định khi điểm A thay đổi trên (O).

Bài 61(VNTST2011):

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) với A, B là các tiếp điểm. Gọi P là điểm thuộc tia đối của tia BA, Q là điểm thuộc tia đối của tai CA sao cho PQ tiếp xúc với (O). Qua P kẻ đường thẳng song song với AC và cắt đường thẳng BC tại E. Qua Q kẻ đường thẳng song song với AB và cắt BC tại F. Chứng minh rằng các đường thẳng QE, PF luôn đi qua điểm cố định lần lượt là M, N và PM.QN không đổi.

Bài 62(IMO2009):

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên các cạnh AC và AB lấy các điểm P, Q. Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của BP, CQ, PQ. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNJ cắt PQ tại R. Chứng minh rằng OR vuông góc với PQ.