GV: Đỗ Xuân Thuỷ

Véc tơ - Toạ độ

Phần I. Véc tơ

1. Chứng minh hệ thức véc tơ

Chú ý + *Cho* $\overrightarrow{AB}$ *Với mọi điểm O, ta có:* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

\+ *Tứ giác ABCD là hbh* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

\+ *Để cm* $\vec{a} = \vec{b}$.

i) $\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{cases}$

ii) *Nếu* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}; \vec{b} = \overrightarrow{DC}$. *Ta cm ABCD là hbh.*

iii) *Tính chất bắc cầu*

\+ *Để cm* $\vec{a} = \vec{0}$ *ta cm*

. $|\vec{a}| = 0$

. $\begin{cases} \vec{a} // \vec{b} \\ \vec{a} // \vec{c} \end{cases} \vec{b}, \vec{c}$ *khác phương* $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Bài 1. Điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k, nghĩa là: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$ (O là điểm bất kì, A khác B).

Ứng dụng giải các bài tập sau

Bài 2. Cho tam giác ABC. Điểm M thuộc đường thẳng BC và $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

Bài 3. Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm thuộc đoạn BC, sao cho MB = 2MC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 4. Cho ΔABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC, sao cho NC = 2NA. Gọi K là trung điểm của cạnh MN.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{KD} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 5. Cho 3 điểm A, M, B thẳng hàng. Biết $n\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{MB}, m+n \neq 0$. CMR với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OM} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

Bài 6. Chứng minh rằng nếu A, M, B thẳng hàng và C, N, D thẳng hàng và: $n\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{MB}, n\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{ND}, m+n \neq 0$, thì $\overrightarrow{MN} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}$.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn AD, BC sao cho: $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{m}{n}$. **CMR:** $\overrightarrow{MN} = \dfrac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}$.

Bài 8. Cho ΔABC. Gọi AN, BM, CK là 3 đường phân giác của ΔABC; a, b, c lần lượt là 3 cạnh của ΔABC ứng với các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng $a(b+c)\overrightarrow{AN} + b(c+a)\overrightarrow{BM} + c(a+b)\overrightarrow{CK} = \vec{0}$.

Bài 9. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, DC của tứ giác ABCD. AN cắt BM tại P. Biết rằng: $\frac{MP}{PB}=\frac{1}{4},\frac{AP}{PN}=\frac{2}{3}$. CMR ABCD là *hình bình hành* .

HD. Ta CMR $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Bài 10. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, DC của tứ giác ABCD. Các đoạn thẳng AN, BM cắt nhau tại P. Biết $\frac{MP}{PB}=\frac{1}{4};\frac{AP}{PN}=\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

Bài 11. Cho 2 hình bình hành ABCD và A'B'C'D'. Các điểm M, N, P và Q chia các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' theo tỉ số bằng *k*: $\frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}}=\frac{\overline{NB}}{\overline{NB'}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PC'}}=\frac{\overline{QD}}{\overline{QD'}}=K$. Biết A, B, C, D là tứ giác. **CMR:** MNPQ là hình bình hành.

Bài tập

Bài 12. Cho tam giác ABC và điểm M tuỳ ý.

a) Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

b) Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$. CD cắt AB tại K. **CMR**: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{2KB}=\vec{0},\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CK}$.

Bài 13. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Bài 14. Cho 4 điểm A, B, C, D bất kỳ. CMR

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$ với I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn AC và BD.

Bài 15. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. CMR

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$. b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

Bài 16. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ tâm O. CMR $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Chú ý: *Nếu* $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$ *thì* $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ *nằm trên tia phân giác góc AOB.*

CM đẳng thức dạng biểu diễn véc tơ

Bài 17. Cho ΔABC. I, J là 2 điểm thoả mãn: $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB};3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$.

HD. *Tính qua các véc tơ chung điểm đầu A.*

Bài 18. Cho ΔABC. I, J là 2 điểm thoả mãn: $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0};\overrightarrow{JA}+4\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. CMR $\overrightarrow{IJ}=-\frac{7}{10}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$.

Bài 19. Cho tam giác ABC, gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng của B qua G.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$.

b) Gọi M là trung điểm của BC, Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 20. Cho tam giác ABC, gọi H là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{HA}-5\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG}=\vec{a},\overrightarrow{AH}=\vec{b}$. Hãy tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Chứng minh hai tam giác có cùng trọng tâm

Định lý: *Hai tam giác ABC và A'B'C' cùng trọng tâm* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

<u>ÁP DỤNG</u>

Bài 21. Cho 2 ΔABC và $A_1B_1C_1$ cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của $\Delta A_1BC, \Delta AB_1C, \Delta ABC_1$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}.$

Bài 22. Cho ΔABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. CMR 2 tam giác ABC và A'B'C' cùng trọng tâm.

Bài 23. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. CMR 2 tam giác ANP và CMQ cùng trọng tâm là G và $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$

Bài 24. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA. Biết MPR, NQS là các tam giác.

a) CMR 2 tam giác đó cùng trọng tâm O.

b) CMR $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$

Bài 25. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy 2 điểm E, F sao cho: $\overrightarrow{EB} = k\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{FB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{FC} (k \neq 1).$

a) Tính $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EF}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}.$

b) CMR 2 ΔABC và AEF cùng trọng tâm.

Bài 26. Cho ΔABC. Trên các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt chia BC, CA, AB theo tỉ số m. CMR 2 tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ cùng trọng tâm.

Bài 27. Cho Δ ABC đều, M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng 2 tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

HD. Qua M kẻ các đường thẳng song với các cạnh của tam giác ABC.

2. Biểu diễn một véc tơ theo các véc tơ khác

Chú ý

1) Trên mp cho 2 véc tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó mọi $\vec{x}$ đều tồn tại cặp số (m; n) sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}.$

2) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

(O là điểm bất kì, A khác B)

3) Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là các véc tơ không cùng phương và $x\vec{a} = y\vec{b}$ thì $x = y = 0.$

_Biểu thị một véc tơ qua 2 véc tơ khác

Bài 28. Cho tam giác ABC. Trên BC lấy điểm I: $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IC}.$

a) Tính $\overrightarrow{AI}$ theo các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}.$

b) Gọi J, K lần lượt là những điểm trên cạnh AC, AB sao cho: JA = 2JC và KB = 3KA. Tính $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}.$

c) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}.$

d) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}.$

Chú ý: Trước hết ta tính $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo 2 véc tơ "gần nhất" như $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}.$ Giả sử $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{AI} + y\overrightarrow{JK} \rightarrow$ $m(x;y)\overrightarrow{AB} = n(x;y)\overrightarrow{AC} \rightarrow m = n = 0 \rightarrow x, y.$

ĐS. a) $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$ b) $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$ d) $\overrightarrow{BC} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK}.$

Bài 29. Cho tam giác ABC, gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI = 3BI và J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

ĐS. a) $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. b) $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Bài 30. Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy biểu diễn các véc tơ sau theo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AE}$.

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AF}$ d) $\overrightarrow{EF}$

Bài 31. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Hãy tính các véc tơ sau theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

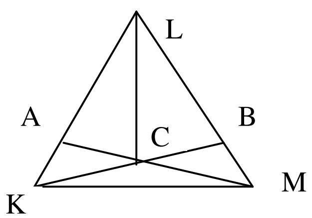
a) $\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm của BO.

b) $\overrightarrow{BG}$, với G là trọng tâm tam giác OCD

Học sinh giỏi

Bài 32. Cho tam giác KLM, trên cạnh KL lấy điểm A sao cho KA/AL = 1/3; trên cạnh LM lấy điểm B sao cho LB/BM = 4/1. Gọi C là giao điểm của KB và AM. Biết dt(KLC) = 2(đvdt). Tính diện tích của tam giác KLM.

HD.



Giả sử $\overrightarrow{KC} = x\overrightarrow{KB} (0 < x < 1)$ (1).

$$\frac{dt(KLM)}{dt(KLC)} = \frac{dt(KLM)}{dt(KLB)} \cdot \frac{dt(KLB)}{dt(KLC)} = \frac{LM}{LB}\frac{KB}{KC} = \frac{5}{4}x.$$ Ta đi tính x.

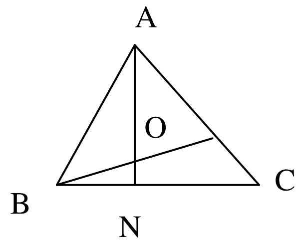
Giả thiết suy ra $\overrightarrow{KB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{KL} + \frac{4}{5}\overrightarrow{KM}$ (2).

Giả sử $\overrightarrow{CA} = y\overrightarrow{CM} (0 < y < 1)$. Suy ra $\overrightarrow{KC} = \frac{1}{1-y}\overrightarrow{KA} - \frac{y}{1-y}\overrightarrow{KM}$ mà $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{KL}$ nên

$\overrightarrow{KC} = \frac{1}{4(1-y)}\overrightarrow{KL} - \frac{y}{1-y}\overrightarrow{KM}$ (3). Từ (1)(2)(3) suy ra $\begin{cases} \frac{1}{4(1-y)} = \frac{x}{5} \\ -\frac{y}{1-y} = \frac{4}{5}x \end{cases} \Rightarrow$ x = 5.

Bài 33. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho AM = 3MC, NC = 2NB. Gọi O là giao điểm của AN và BM. Tính diện tích (ABC) biết diện tích(OBN) bằng 1(đvdt).

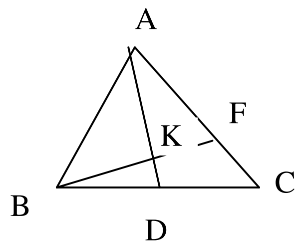
HD. $\frac{dt(KLM)}{dt(KLC)} = \frac{dt(KLM)}{dt(KLB)} \cdot \frac{dt(KLB)}{dt(KLC)} = \frac{LM}{LB}\frac{KB}{KC} = \frac{5}{4}x$ (với AN = xON).



$\overrightarrow{AN} = \frac{x}{x-1}\overrightarrow{AO}$ (1). Giả thiết suy ra $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (2). Giả sử $\overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AM}}{1-y} =$ $\frac{1}{1-y}\overrightarrow{AB} - \frac{3y}{4(1-y)}\overrightarrow{AC}$ (3). Thay (2),(3) vào(1) tính được x =10.

Bài 34. Cho tam giác ABC. Điểm K chia trung tuyến AD theo tỉ số -3. Đường thẳng BK chia diện tích tam giác ABC theo tỉ số nào ?

HD.



$\frac{dt(ABF)}{dt(CBF)} = \frac{FA}{FC} = x$ Giả sử $\overrightarrow{BF} = x\overrightarrow{BK}$ (1). Giả thiết $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$ (2). Mà $\overrightarrow{BF} = \frac{\overrightarrow{BA} - x\overrightarrow{BC}}{1-x}$ (3) nên từ (1)(2)(3) suy ra x = -3/2.

Bài 35. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, K sao cho: $\frac{\overline{\overline{DB}}}{\overline{\overline{DC}}} = \frac{\overline{\overline{EC}}}{\overline{\overline{EA}}} = \frac{\overline{\overline{KA}}}{\overline{\overline{KB}}} = k$. Giả sử BE cắt AD tại B’, CK cắt BE tại C’, AD cắt CK tại A’. Chứng minh rằng 3 tam giác ABC, DKE và A’B’C’ có cùng trọng tâm.

HD. a) Gt suy ra $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}$... suy ra $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

b) Giả sử $\overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{BC'}$. (1). Gt có; $\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BC} - k\overrightarrow{BA}}{1-k}$ (2)

Giả sử $\overrightarrow{C'C} = y\overrightarrow{C'K} \Rightarrow \overrightarrow{BC'} = \frac{\overrightarrow{BC} - y\overrightarrow{BA}}{1-y} = \frac{1}{1-y}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{(1-y)(1-k)}\overrightarrow{BA}$ (3). Thay (2)(3) vào (1) được $x = \frac{k^2 - k + 1}{1-k} \Rightarrow \overrightarrow{BC'} = \frac{1-k}{k^2 - k + 1}\overrightarrow{BE}$. Từ đó $\sum\overrightarrow{BC'} = \sum\overrightarrow{BE} = \vec{0}$.

Bài 36. (T6/345) Trên 2 cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt lấy 2 điểm E, D sao cho $\frac{AE}{EB} = \frac{CD}{DA}$.
Gọi M là giao điểm của BD và CE. Xác định vị trí của E, D sao cho diện tích tam giác BMC đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị đó theo diện tích của tam giác ABC.

HD. Giả sử $\frac{AE}{EB}=\frac{CD}{DA}=\frac{1}{m}$. Ta có $\frac{dt(ABC)}{dt(BMC)}=\frac{dt(ABC)}{dt(BDC)}.\frac{dt(BDC)}{dt(BMC)}=\frac{AC}{DC}.\frac{BD}{BM}$.

Ta có $\frac{DA}{DC}=m\Rightarrow\frac{AC}{DC}=m+1$. Đặt $\frac{BD}{BM}=x\Rightarrow\frac{dt(ABC)}{dt(BMC)}=(m+1)x$. Ta đi tính x.

+) $\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{BM}\Rightarrow\overrightarrow{MD}=(1-x)\overrightarrow{MB}\Rightarrow$

$\overrightarrow{CM}=\frac{\overrightarrow{CD}-(1-x)\overrightarrow{CB}}{1-(1-x)}=\frac{1}{(1+m)x}\overrightarrow{CA}+\frac{x-1}{x}\overrightarrow{CB}$

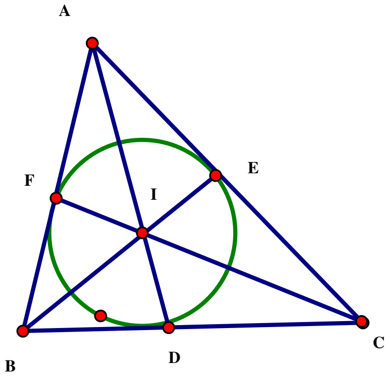
(2) (vì $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{1+m}\overrightarrow{CA}$.).

+) Giả sử

$\overrightarrow{CM}=y\overrightarrow{CE}\Rightarrow\frac{x-1}{x}=\frac{y}{1+m};\ \frac{1}{(1+m)x}=\frac{y}{1+m}m\ \Rightarrow x=\frac{m^2+m+1}{m(m+1)}$

Từ đây suy ra $\frac{dt(ABC)}{dt(BMC)}=m+\frac{1}{m}+1\geq 3\Rightarrow dt(BMC)\leq\frac{dt(ABC)}{3}$.

Bài 37. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. CMR: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.



HD. Ta có $\frac{IB}{IE}=\frac{AB}{AE};\frac{EC}{EA}=\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{EC+EA}{EA}=\frac{c+a}{c}\Rightarrow EA=\frac{cb}{a+c}$ vậy $\frac{IB}{IE}=\frac{c(a+c)}{bc}\Rightarrow\overrightarrow{IB}=-\frac{a+c}{b}\overrightarrow{IE}$.

Mặt khác $\overrightarrow{EC}=-\frac{a}{c}\overrightarrow{EA}\Rightarrow\overrightarrow{IE}=\frac{a\overrightarrow{IA}+c\overrightarrow{IC}}{a+c}\Rightarrow-\frac{a+c}{b}\overrightarrow{IE}=-\frac{a\overrightarrow{IA}+c\overrightarrow{IC}}{b}$ nên $\overrightarrow{IB}=-\frac{a\overrightarrow{IA}+c\overrightarrow{IC}}{b}$

3. Chứng minh hai véc tơ cùng phương; ba điểm thẳng hàng

Chú ý + 3 điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\exists k:\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Bài 38. CMR 3 điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\exists x,y:x+y=1:\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$. (với mọi điểm O).

Bài 39. Giả sử $\vec{a}=m_1\vec{x}+n_1\vec{y};\vec{b}=m_2\vec{x}+n_2\vec{y}$ với $\vec{x},\vec{y}$ là 2 véc tơ không cùng phương. CMR

$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

Chú ý: *Có thể CM 3 điểm thẳng hàng hoặc hai véc tơ cùng phương bằng hai bài tập trên.*

Bài 40. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D: $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$. Gọi E là điểm thoả mãn:

$4\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. Chứng minh rằng A, E, D thẳng hàng.

HD. ***Đưa về các véc tơ chung điểm đầu là E.***

Bài 41. Cho ΔABC. Gọi D, I là các điểm xác định bởi biểu thức $3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. CMR A, I, D thẳng hàng.

Bài 42. Cho tam giác ABC. M, N là 2 điểm xác định như sau: $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}; \overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Chứng minh rằng M, N, B thẳng hàng.

HD. *Đưa về các véc tơ chung điểm đầu là N.*

Bài 43. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$; $6\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ $\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=\vec{0}$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 44. Cho ΔABC, lấy các điểm M, N, P sao cho: $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}; \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 45. Cho ΔABC, lấy các điểm P, Q sao cho $-\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\vec{0}, 3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC}=\vec{0}$. CMR đường thẳng PQ đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 46. Cho tam giác ABC, lấy các điểm I, J sao cho: $\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}; \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

a) Chứng minh rằng I, B và trọng tâm G của ΔABC thẳng hàng.

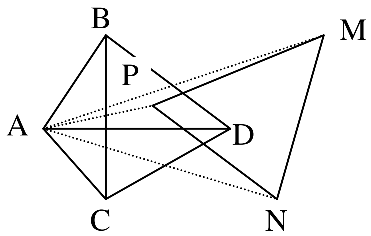
b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IJ} // \overrightarrow{AC}$.

Bài 47. Cho tứ giác ABCD. Gọi P, Q, R lần lượt là trọng tâm của ΔADB, BDC, CDA. CMR điểm D và trọng tâm của 2 ΔABC, PRQ thẳng hàng.

HD. *Dùng hệ thức véc tơ với trọng tâm tam giác. Phân tích các véc tơ thành hiệu các véc tơ có điểm đầu là D. Ta có* $\overrightarrow{DG'} = 2/3\overrightarrow{DG}$.

Bài 48. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm đối xứng với D qua trung điểm các cạnh của ΔABC. CMR điểm D và trọng tâm của 2 tam giác ABC, MNP thẳng hàng.

HD.



Ta có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}; \overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{DP}=3\overrightarrow{DG_1}$. Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có $2\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DG_1}$.

Bài 49. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Qua 3 đỉnh A, B, C vẽ các đường thẳng song song với nhau cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng trọng tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1 thẳng hàng.

Bài 50. Cho lục giác ABCDEF. Các điểm M, N, P, Q, R, S lần lượt thay đổi trên các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA sao cho: $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CD}=\frac{DQ}{DE}=\frac{ER}{EF}=\frac{FS}{FA}$. Chứng minh rằng trọng tâm hai tam giác ANP và CMQ đối xứng nhau qua 1 điểm cố định O.

HD. *O là điểm thoả mãn*: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

Bài 51. Cho ΔABC. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$. Tìm x để 3 điểm A, M, N thẳng hàng.

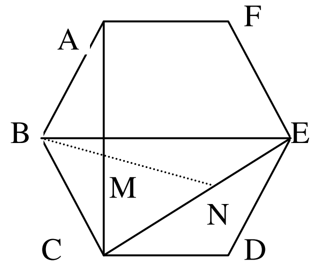
Bài 52. Cho ΔABC. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$. Tìm x để 3 điểm A, M, N thẳng hàng.

Tham khảo - học sinh giỏi

Bài 53. (*)Cho hình bình hành ABCD, gọi I, J, K là các điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AI} = p\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AJ} = q\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AK} = r\overrightarrow{AD}$. Chứng minh rằng điều kiện để I, J, K thẳng hàng là: $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$.

Bài 54. (*IMO 23) Trên các đường chéo AC và CE của lục giác đều ABCDEF, ta lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$. Biết rằng B, M, N thẳng hàng. Tìm *k*.

HD.



Gt $\Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{NE}{NC} = \frac{1-k}{k} \Rightarrow k\overrightarrow{MC} = (1-k)\overrightarrow{MA}$;

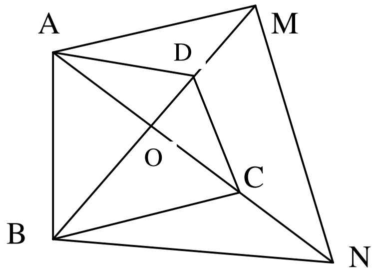
$k\overrightarrow{NE} = (1-k)\overrightarrow{NC}$

Mà $\overrightarrow{BE} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ nên

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} + (1-k)\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{BN} = (k+1)\overrightarrow{BE} + 2k\overrightarrow{BC} \end{cases}$. Do B, M, N thẳng hàng nên $\frac{k}{k+1} = \frac{1-k}{2k}$.

Từ đó tính được $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (0< k< 1).

Bài 55. Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng đi qua đỉnh A song song với BC cắt BD tại M, đường thẳng đi qua đỉnh B song song với AD cắt AC tại N. CMR: MN// DC.



HD. Đặt $\overrightarrow{ON} = n\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = mn\overrightarrow{CD}$.

(*Do ON/OA = OB/OD; OM/OB = OA/OC*).

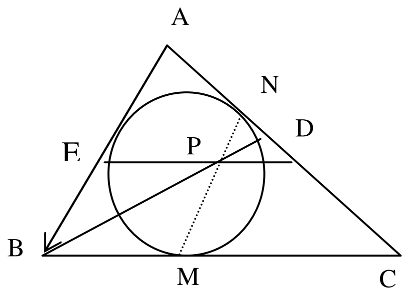
Bài 56. (*)Cho ΔABC. Đương tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với AB, AC tại M, N. Vẽ đường trung bình DE (// AB) của tam giác. Đường phân giác góc B cắt DE tại P. Chứng minh rằng 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

HD. Đặt AB = c, BC = a, CA = b. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ là các véc tơ đơn vị của tia BC, CA và AB.

+ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = \vec{0}$.

+ $\overrightarrow{NA} = (p-a)\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{AM} = (p-a)\overrightarrow{e_3}$

suy ra $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} = (p-a)(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$.



Tam giác PEB cân tại E nên PE = EB = $\frac{a}{2} \to \overrightarrow{PE} = \frac{a}{2}\overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{EB} = -\frac{a}{2}\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{BM} = (p-b)\overrightarrow{e_3}$ và $\overrightarrow{e_1} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{e_2} - \frac{c}{a}\overrightarrow{e_3}$

nên $\overrightarrow{PM} = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\right)$. Từ đây suy ra M, N, P thẳng hàng.

4. **Chứng minh đồng quy**

Phần II. Toạ độ

5. **Tích vô hướng của hai véc tơ**

Chú ý: Để tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, ta dùng các phương pháp sau:

+ Phân tích $\vec{a}, \vec{b}$ theo 2 véc tơ $\vec{x}, \vec{y}$ không cùng phương (vuông góc với nhau càng tốt).

+ Chọn 2 véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ dễ tính tích vô hướng (vuông góc càng tốt), phân tích 2 véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$ (Khi $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương). Tính $\vec{u}.\vec{v} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}$.

+ $2\vec{a}.\vec{b} = (\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a} - \vec{b})^2; 4\vec{a}.\vec{b} = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2$

(Dùng khi 2 véc tơ chung điểm đầu).

+ Sử dụng công thức hình chiếu (xem bài tập 1).

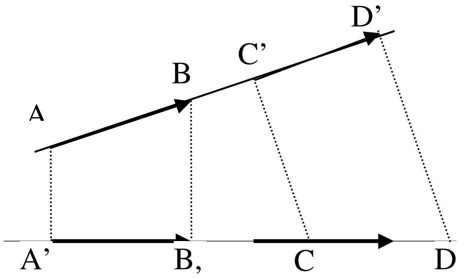
+ $\cos\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

+ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

5.1 Tính tích vô hướng, tính góc

Bài 1. (Công thức hình chiếu).

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$, trong đó $\overrightarrow{A'B'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AB}$ lên đường thẳng CD, $\overrightarrow{C'D'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{CD}$ lên AB.



Bài 2. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB = 2a, đáy lớn BC = 3a, đáy nhỏ AD = a.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

b) Gọi I là trung điểm của CD. Tính góc $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{BD}\right)$.

HD. *Dùng công thức hình chiếu hoặc phân tích theo 2 véc tơ* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$

Bài 3. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a}{3}$. Tính $\cos\angle CMD$.

Bài 4. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính các tích vô hướng sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

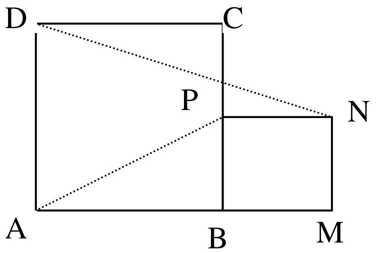
b) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})(2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$

c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ (M thuộc đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD).

Bài 5. Cho ΔABC cân tại A, hai trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau. Tính $\angle$ BAC.

HD. Tính $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bài 6. Cho 2 hình vuông ABCD và MNPQ sắp xếp sao cho P thuộc cạnh BC, B thuộc đoạn AM. Tính góc($\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DN}$.)



5.2 Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD. CMR: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

HD. *Cách 1:* ĐL cosin.

Cách 2: $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 2\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2\right) - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)^2$

Bài 8. Cho hình chữ nhật ABCD, M là điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng:

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

c) $NA^2 = 2\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NO}$ (O là tâm hình chữ nhật và N thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật).

Bài 9. Cho tứ giác ABCD. Đặt DA = a; DB = b; DC = c; AB = c_1; BC = a_1; CA = b_1. CMR

$$DG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$$

(G là trọng tâm của tam giác ABC).

HD. $\overrightarrow{DG}^2 = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)^2$.

Bài 10. Cho tam giác ABC trọng tâm G. CMR

a) $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GD} = \frac{1}{6}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$.

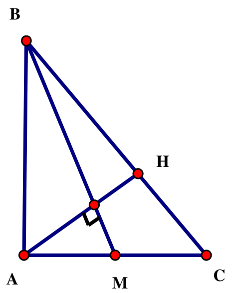
b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$, với M là điểm tuỳ ý. Từ đó suy ra vị trí điểm M để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M để tổng: $T = 2MA^2 + 3MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

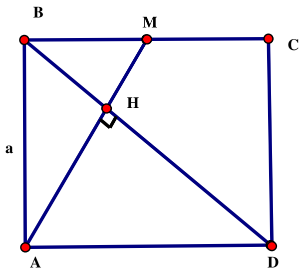
Bài 12. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M để tổng: $T = 2MA^2 + 3MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5.3 Ứng dụng chứng minh 2 đường thẳng vuông góc

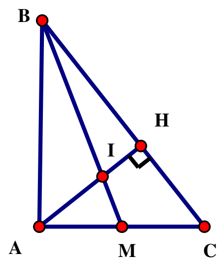
Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, gọi M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với BM cắt BC tại H. Tính tỉ số $\frac{HB}{HC}$.



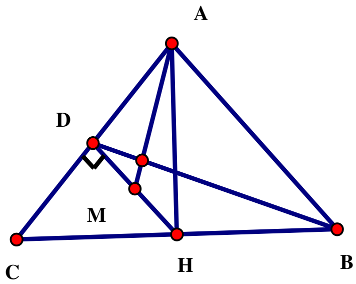
Bài 2. Cho hình chữ nhật ABCD, độ dài cạnh AB là a. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Biết AM vuông góc với đường chéo BD. Tính độ dài cạnh AD.



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M là trung điểm AC, I là giao điểm giữa AH và BM. Tính tỉ số $\frac{IB}{IM}$ biết $AB = a, AC = a\sqrt{2}$.

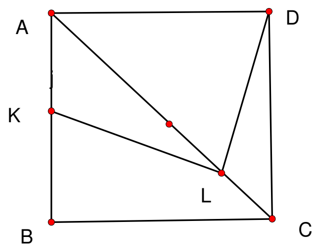


Bài 4. Cho tam giác ABC, cân tại đỉnh A, đường cao AH. Gọi D là hình chiếu vuông góc của H lên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

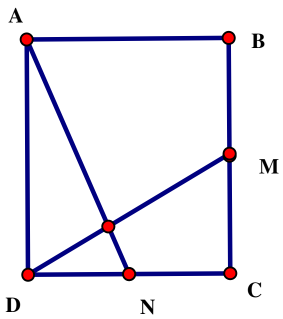


Bài 5. Gọi K là trung điểm của cạnh AB của hình vuông ABCD, L là điểm chia trong đường chéo AC theo tỉ số $\frac{AL}{LC}=\frac{3}{1}$. CMR KL $\perp$ LD.

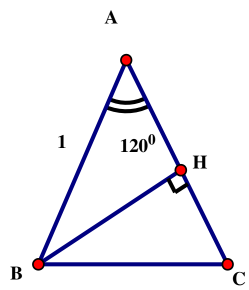
HD. Phân tích $\overrightarrow{KL},\overrightarrow{LD}$ theo 2 véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$



Bài 6. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và CD. Chứng minh rằng AN, DM vuông góc với nhau.



Bài 7. Cho tam giác cân ABC có $\widehat{BAC}=120^0; AB=AC=1.$ Từ B kẻ đường cao BH. Tìm tỉ số $\frac{HA}{HC}$.

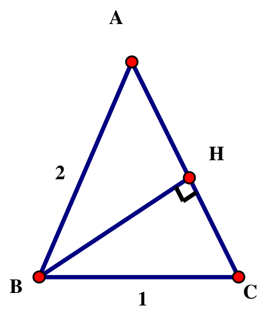


Giả sử $\overrightarrow{HA}=k\overrightarrow{HC}\Rightarrow\overrightarrow{BH}=\dfrac{\overrightarrow{BA}-k\overrightarrow{BC}}{1-k}$; $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$

$$BH.AC=0\Rightarrow(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA}-k\overrightarrow{BC})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}^2+k\overrightarrow{BC}^2-(1+k)\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}.\cos 30^0; CB = AB.\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A, $AB = AC = 2; BC = 1$. Từ B kẻ đường cao BH. Tìm tỉ số $\dfrac{HA}{HC}$.

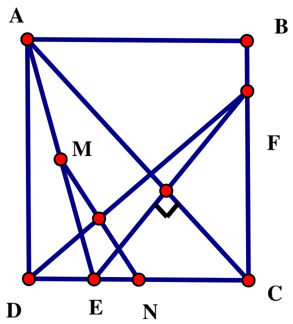


Giả sử $\overrightarrow{HA} = k\overrightarrow{HC} \Rightarrow \overrightarrow{BH} = \dfrac{\overrightarrow{BA} - k\overrightarrow{BC}}{1-k}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

$BH.AC = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} - k\overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}^2 + k\overrightarrow{BC}^2 - (1+k)\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$

Mà $2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})^2 \Rightarrow 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 4 + 1 - 4 = 1$. Vậy $4 + k - \dfrac{1+k}{2} = 0 \Rightarrow k = -7$

Bài 9. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh DC lấy điểm E, kẻ EF $\perp$ AC (F thuộc cạnh BC). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và DC. Chứng minh rằng: MN $\perp$ DF.



Bài 10. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm P, trên cạnh AD lấy điểm Q sao cho AP = AQ. Kẻ AH vuông góc DP tại H. Chứng minh rằng CH $\perp$ QH.

Bài 11. Cho hình vuông ABCD. E, F là các điểm xác định bởi $\vec{BE} = \dfrac{1}{3}\vec{BC}, \vec{CF} = -\dfrac{1}{2}\vec{CD}$ và AE cắt BF tại điểm I. CMR: $\angle AIC$ =1v.

Bài 12. Cho hcn ABCD. Kẻ BH $\perp$ AC, H thuộc đoạn AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AH và DC. CMR BM $\perp$ MN.

HD. *Phân tích theo* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

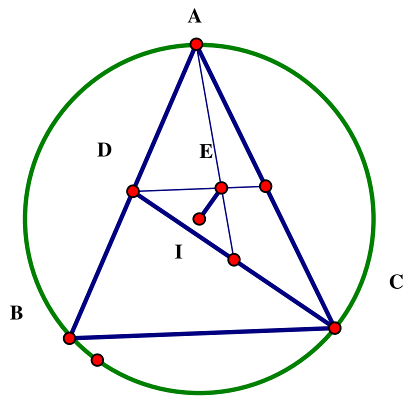
Bài 13. Cho hcn ABCD. Đường thẳng vuông góc với AC qua D cắt BC tại I. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng DC và CI. Chứng minh rằng $AE \perp DF$.

Bài 14. Trên hai cạnh góc vuông AB, AC của tam giác ABC vuông lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho AB.AB' = AC.AC'. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. CMR: $AM \perp B'C'$.

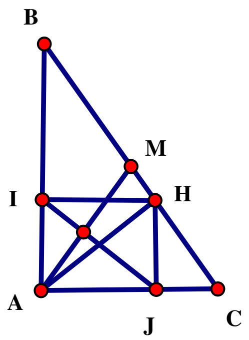
Bài 15. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác vuông cân ABC tại C, lấy các điểm M, N, P sao cho: $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$. Chứng minh rằng: $CP \perp MN$ và $CP = MN$.

Bài 16. Cho tam giác đều ABC. Lấy 2 điểm M, N sao cho $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC}, \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. CMR: $\angle BIC = 1$v.

Bài 17. Cho ΔABC cân tại A. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm ΔACD. CMR: $IE \perp CD$.



Bài 18. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB và AC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $AM \perp IK$.



6. Toạ độ

6.1 Tính toạ độ

Bài 19. Trên trục x'Ox cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a) $\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0$ (hệ thức OLe)

b)(Hệ thức Stioa) Với mọi điểm M trên trục. CMR

$\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} + \overline{MC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$

Bài 20. Trong mặt phẳng Oxy cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. CMR $x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k}; y_A = \frac{y_A - ky_B}{1-k}$.

Áp dụng

Bài 21. Cho tam giác ABC. M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, BC. Biết M(1; 2) N(3; -5); P(5; 7). Tính toạ độ các điểm A, B, C và trọng tâm G.

Bài 22. Cho 3 điểm A, B, C có toạ độ: A (1; 3), B(-3; 4), C(0; 3).

a) CMR A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.
b) Tính chu vi, diện tích của tam giác ABC.
c) Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
d) Tìm toạ độ trực tâm của tam giác ABC.
e) Tìm toạ độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A.
f) Tính độ dài phân giác trong của góc A.

Bài 23. Trong mặt phẳng Oxy cho A(0; 2); B(1; 1); C(-1; -2). Các điểm A', B', C' thoả mãn: $\overrightarrow{A'B} = -\overrightarrow{A'C}$; $\overrightarrow{B'C} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{B'A}$; $\overrightarrow{C'A} = -2\overrightarrow{C'B}$;

a) Tính toạ độ A', B', C'.
b) Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

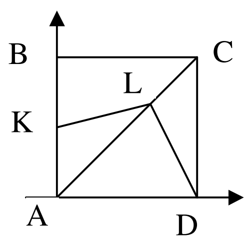
Bài 24. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P thoả mãn: $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NA}$; $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$. Tìm toạ độ các đỉnh tam giác ABC biết M(3; 0); N(4; -1), P(-4; 8).

Bài 25. Trong mặt phẳng Oxy cho A(2; 5); B(4; -1) và điểm M(2; 0). Tìm trên đường thẳng AB điểm N sao cho MN vuông góc với AB.

6.2 Chứng minh vuông góc

Bài 26. Gọi K là trung điểm của cạnh AB của hình vuông ABCD, L là điểm chia trong đường chéo AC theo tỉ số $\frac{AL}{LC} = \frac{3}{1}$. CMR KL $\perp$ LD.

HD. Chọn hệ trục toạ độ:



Giả sử A(0; 0), B(o; a), D(a;0)m suy ra C(0; 0). Tính toán được L(3a/4; 3a/4).

Bài 27. Cho hcn ABCD. Kẻ BH $\perp$ AC, H thuộc đoạn AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AH và DC. CMR BM $\perp$ MN.

HD. *Chọn hệ trục toạ độ sao cho A(0; 0), B(1; 0), D(0; d). Sử dụng H thuộc AC H(k; kd) và AH $\perp$ HB tính H.*

Bài 28. Cho hcn ABCD. Đường thẳng vuông góc với AC qua D cắt BC tại I. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng DC và CI. Chứng minh rằng AE $\perp$ DF.

HD. *Chọn hệ trục: A(0; 0), B(0; 1), D(1; 0).*

Bài 29. Trên hai cạnh góc vuông AB, AC của tam giác ABC vuông lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho AB.AB' = AC.AC'. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. CMR: AM $\perp$ B'C'.

Bài 30. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác vuông cân ABC tại C, lấy các điểm M, N, P sao cho: $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$. Chứng minh rằng: CP $\perp$ MN và CP = MN.

Bài 31. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh DC lấy điểm E, kẻ EF $\perp$ AC (F thuộc cạnh BC). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và DC. Chứng minh rằng: MN $\perp$ DF.

Bài 32. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm P, trên cạnh AD lấy điểm Q sao cho AP = AQ. Kẻ AH vuông góc DP tại H. Chứng minh rằng CH$\perp$ QH.

Bài 33. Cho hình vuông ABCD. E, F là các điểm xác định bởi $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}, \vec{CF} = -\frac{1}{2}\vec{CD}$ và AE cắt BF tại điểm I. CMR: $\angle AIC$ =1v.

Bài 34. Cho tam giác đều ABC. Lấy 2 điểm M, N sao cho $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC}, \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. CMR: $\angle BIC$ =1v.

Bài 35. Cho tam giác ABC, cân tại đỉnh A, đường cao AH. Gọi D là hình chiếu vuông góc của H lên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AM $\perp$ BD.

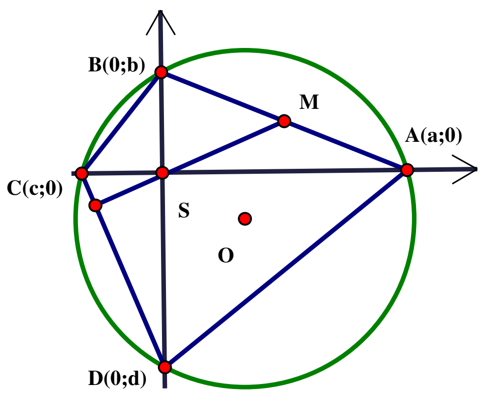
Bài 36. Cho ΔABC cân tại A. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm ΔACD. CMR: IE $\perp$ CD.

Bài 37. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB và AC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: AM $\perp$ IK.

Bài 38. Cho tứ giác ABCD có AC $\perp$ BD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1:3. Chứng minh rằng EG = FH, EG $\perp$ FH.

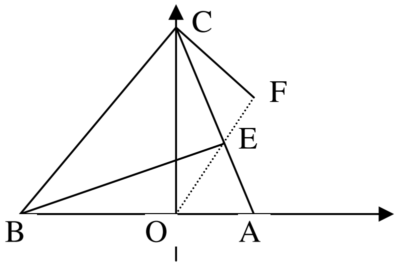
Bài 39. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo vuông góc với nhau, nội tiếp đường tròn tâm (O). Nối trung điểm M của dây cung AB với điểm S là giao điểm của AC với BD. Chứng minh rằng: MS $\perp$ CD.

HD.



Bài 40. (NamTư 95) Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Gọi D là chân đường vuông góc từ C tới AB, E là chân đường vuông góc từ D đến AC, F là điểm thuộc đoạn DE sao cho $\frac{DE}{FE} = \frac{DA}{DB}$. Chứng minh rằng BE $\perp$ CF.

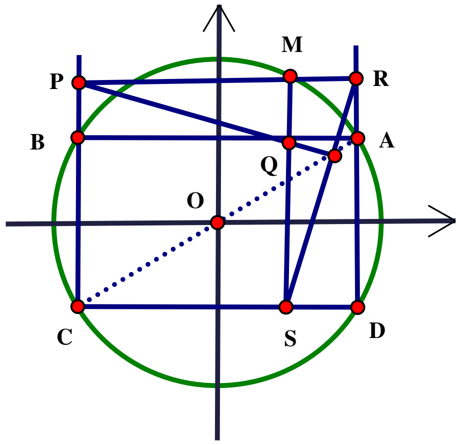
HD.



A(a; 0),
B(b; 0)
C(0; c)

Bài 41. (Vô địch NamTư 83)

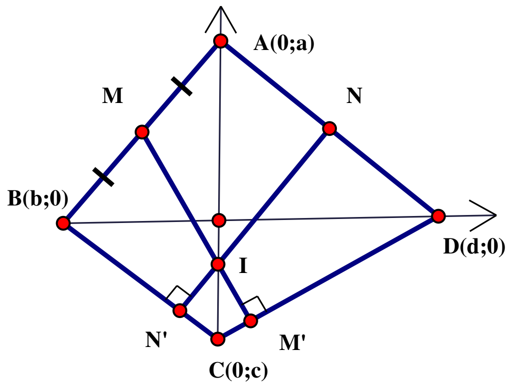
GV: Đỗ Xuân Thuỷ
Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, người ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R, S là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AD, AB, BC, CD. CMR $PQ \perp RS$ và giao điểm của chúng nằm trên một đường chéo của hcn.



HD. Giả sử R = 1 và $A(a; \sqrt{1-a^2})$; $B(-a; \sqrt{1-a^2})$; $C(-a; -\sqrt{1-a^2})$; $D(a; -\sqrt{1-a^2})$; $M(m;\sqrt{1-m^2})$
$P(-a;\sqrt{1-m^2});R(a;\sqrt{1-m^2});Q(m;\sqrt{1-a^2});S(m;-\sqrt{1-a^2})$

6.3 Một số dạng toán CM hình học khác

Bài 42. (Vĩnh Phúc 95)
Cho tứ giác lồi ABCD có $AC \perp BD$. Qua trung điểm của AB và AD kẻ các đường vuông góc với các cạnh CD và BC. Chứng minh rằng 2 đường thẳng đó và AC đồng quy.
HD. *Lập các phương trình đường thẳng.*



Bài 43. (Trại Hè Hùng Vương 05)
Cho hình vuông ABCD. Tìm quỹ tích các điểm M thuộc bên trong và biên của hình vuông sao cho: diện tích(ΔMAB) = diện tích(ΔMAC).
ĐS: *M thuộc cạnh AD và đoạn thẳng AI (I: trung điểm DC).*

Bài 44. (Trại Hè Hùng Vương 05)
Cho hình vuông ABCD. Giả sử E là trung điểm cạnh CD và F là 1 điểm ở bên trong hình vuông. Xác định vị trí điểm Q thuộc cạnh AB: $\widehat{AQE} = \widehat{BQF}$.

Bài 45. (T10/217)Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D và trên cạnh BC lấy điểm E sao cho hình chiếu của DE lên BC bằng $\frac{BC}{2}$. CMR đường vuông góc với DE tại E luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 46. (APMO 98) Cho tam giác ABC. Gọi D là đường cao hạ từ A. Gọi E, F là điểm khác D nằm trên một đường thẳng đi qua D sao cho AE vuông góc với BE, AF vuông góc với CF. Fọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn BC,EF. CMR AN vuông góc NM.

HD. *B(-1; 0), C(c; 0), A(0; a). Giả sử* $M\left(\frac{c-1}{2};0\right)$ *và đ/thẳng qua D:y = kx thì*

$E\left(\frac{ak-1}{k^2+1};\frac{ak^2-k}{k^2+1}\right), F\left(\frac{ak+c}{k^2+1};\frac{ak^2+ck}{k^2+1}\right)$

Bài 47. (T9/253)Cho hình vuông ABCD, trung điểm E của AB, một điểm F trên cạnh BC sao cho FB > FC. Gọi G là giao điểm của tia EF với tia DC; I là tâm đường tròn tiếp xúc đường thẳng DC tại G và với BC. Tiếp tuyến thứ hai của (I) kẻ qua F cắt DC tại điểm K. CMR: tứ giác AEGK là hình bình hành.

HD. *A(0; 0), B(1; 0), D(0; 1)suy ra D(1; 1),* $E\left(\frac{1}{2};0\right)$, *F(1; f) (1/2< f< 1),* $G\left(\frac{f+1}{2f};1\right)$,

$I\left(\frac{f+1}{2f};\frac{3f-1}{2f}\right); r=\frac{1-f}{2f}$. *Tiếp tuyến qua F:* $y-f=\frac{2f(1-f)}{1-2f}(x-1)$, $K\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Bài 48. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo vuông góc với nhau, nội tiếp đường tròn tâm (O). Nối trung điểm M của dây cung AB với điểm S là giao điểm của AC với BD. Chứng minh rằng: MS $\perp$ CD.

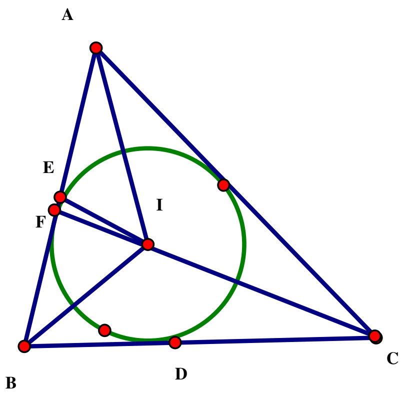
Bài 49. (NamTư 95) Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Gọi D là chân đường vuông góc từ C tới AB, E là chân đường vuông góc từ D đến AC, F là điểm thuộc đoạn DE sao cho $\frac{DE}{FE}=\frac{DA}{DB}$. Chứng minh rằng BE $\perp$ CF.

Bài 50. (NamTư 83)Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, người ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R, S là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AD, AB, BC, CD. CMR PQ $\perp$ RS và giao điểm của chúng nằm trên một đường chéo của

Bài 51. (T5/207) Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A. Lấy điểm M tuỳ ý trên cạnh AC, kẻ tia Ax vuông góc với BM. Gọi H là giao điểm của Ax với BC và K là điểm đối xứng với C qua H. Kẻ tia Ky vuông góc với BM, gọi I là giao điểm của Ky với AB. Tính $\widehat{AIM}$. ĐS: 45^0

Bài 52. Cho tứ giác IAJB có các góc A, B vuông và IA > IB. M là một điểm bất kì trên đường thẳng IJ. CMR: $\frac{JA}{JB}<\frac{MA}{MB}<\frac{IA}{IB}$.

Bài 57. (HVCSND –kA 2000) Cho tam giác ABC có đường thẳng đi qua trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC vuông góc với phân giác trong góc C. CMR: $\frac{a+b+c}{3}=\frac{2ab}{a+b}$.



HD. Ta có $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=0 \Leftrightarrow a(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CI})+b(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CI})+c\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IC}=-\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b+c}$

$$0=\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IC}=(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CG})\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IC}^2-\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3}.\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b+c}=\left(\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b+c}\right)^2-\frac{(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB})}{3(a+b+c)}$$

$3(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB})^2-(a+b+c)(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB})=0$ hay

$3(a^2b^2+a^2b^2+2ab\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})-(a+b+c)[ab^2+ba^2+(a+b)\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}]=0$

Hay $6a^2b^2(1+\cos C)-ab(a+b)(a+b+c)(1+\cos C)=0\Rightarrow 6ab=(a+b)(a+b+c)$

Định lý sin, cosin. Giải tam giác

Một số bài tập của chương trình lớp 7, 8, , giải bằng cách kẻ đường phụ phức tạp.

Bài 53. Cho tam giác ABC có góc A$=120^0$, AB=4, AC=6. Tính độ dài trung tuyến AM.

HD. *Định lý cosin* tính được BC. Sau đó tính độ dài trung tuyến AM.

Bài 54. Cho tam giác ABC có góc A$=45^0$. Chứng minh rằng $dt(\Delta ABC)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{4}$.

HD. *Giả thiết suy ra sinA=cosA. Định lý cosin* ta có: dt(ABC)=2AB.AC.cosA=2AB.AC.sinA= $\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

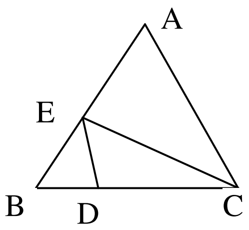
Bài 55. Cho tam giác ABC có góc A$=135^0$, BC=5, đường cao AH=1. Tính độ dài các cạnh AB và AC.

HD. *2.diện tích(ABC)= AB.AC.sinA =AH.BC⇒AC.AB=5. Mặt khác ĐLcosin ta được* $AB^2+BC^2-2AB.AC.\sin A=BC^2$. *Từ đó tính được AB, AC.*

Bài 56. Tứ giác ABCD có O là giao điểm hai đường chéo, AB=6, OA=8, OB=4, OD=6. Tính độ dài AD.

HD. *Định lý sin tính được góc BOA ⇒ góc AOD⇒AD.*

Bài 57. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Trên cạnh BC lấy điểm D, còn trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BD = 1/3BC, AE = ED. Tính độ dài CE.



Đặt ED = EA = x, BE = a – x.

$BD=\frac{a}{3};\angle A=\angle B=60^0$. Áp dụng đl cosin cho tam giác BDE:

$x=\frac{7}{15}a\rightarrow BE=\frac{8}{15}a.$

đl cosin cho tam giác AEC $\rightarrow CE=\frac{13}{15}a.$

Bài 58. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Biết BD = 7, DC = 15. Tính độ dài AD.

HD. *Đặt AB = y, AD = x. Ta có* $AB^2+AD^2=BD^2\Rightarrow x^2+y^2=7^2$. *Mặt khác* $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{CB}$ *hay* $\frac{AD^2}{CD^2}=\frac{AB^2}{CB^2}\Rightarrow\frac{x^2}{15^2}=\frac{y^2}{y^2+(x+15)^2}$ *Từ đó tính được x.*

Bài 59. Cho tam giác ABC đường phân giác AD = $2\sqrt{2}$, BD = 2, BC = 4. Tìm AB, AC.

Bài 60. Cho tam giác ABC có góc A = 60^0 và BC = $\sqrt{13}$, trung tuyến AM = $\frac{\sqrt{37}}{2}$. Tìm AB, AC.

Bài 61. (*)(ĐL Stawart 1717 - 1785)

Cho tam giác ABC, D là 1 điểm trên cạnh BC. Đặt AD = d, BD = m, DC = n. Khi đó:

$ad^2 = mb^2 + nc^2 - amn.$

HD. (*ĐL cosin*)

Từ tam giác ADB $\Rightarrow c^2 = d^2 + m^2 - 2md\cos\alpha$

$\Delta ACD \Rightarrow b^2 = n^2 + d^2 - 2nd\cos(180^0 - \alpha).$

$\Rightarrow nc^2 + mb^2 = n(m^2 + d^2) + m(n^2 + d^2) =$

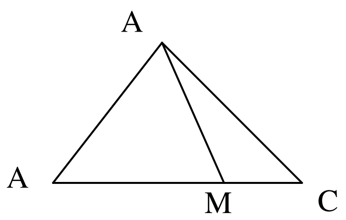
$= mn(m+n) + (m+n)d^2.$

Vì m + n = a nên ta có đpcm.

Bài 62. (*) Cho tam giác ABC vuông tại A. M thuộc cạnh BC sao cho $\angle BAM = \alpha$. Chứng minh rằng

$$AM = \frac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}.$$

HD. (*ĐL sin*)



Tam giác ABM$\Rightarrow BM = \dfrac{\sin\alpha}{\sin B}.AM$

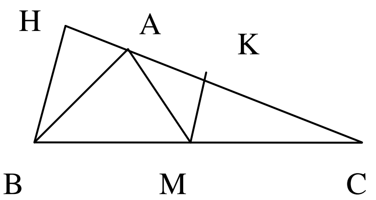
Tam giác ABM$\Rightarrow CM = \dfrac{\sin(90^0 - \alpha)}{\sin C}.AM$

$\Rightarrow AM + BM = BC = AM\left(\sin\alpha\dfrac{1}{\sin B} + \cos\alpha\dfrac{1}{\sin C}\right)$(*). Từ tam giác vuông ABC ta có:

$\dfrac{1}{\sin B} = \dfrac{BC}{b}; \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{BC}{c}$ Thay vào (*) ta có đpcm.

Lời giải tham khảo

Lời giải B90. (lớp 8)



.

kẻ BH$\perp$AC. Tam giác ABH vuông có góc BAH=60^0 nên AH=2. ĐL Pythagore, ta tính được CH=8. Kẻ MK$\perp$CH thì HK=4, AK=2, MK=$\sqrt{3}$ suy ra AM=$\sqrt{7}$.

Lời giải B91. (lớp 8)

Kẻ BH vuông góc với AC. Đặt BH= AH=m,
HC = n. Biến đổi ta được đpcm.

Lời giải B92. (lớp 8) Kẻ $CK \perp BA$. Ta được góc CAK= 45^0. nên tam giác ACK vuông cân tại K. Đặt AB=x, AK=KC=y. Từ 2 tam giác đồng dạng HBA và KBC ta có xy=5. Mặt khác xét tam giác vuông BKC ta có $x^2 + 2xy + 2y^2 = 25$. Từ đó tính được AB= $\sqrt{5}$, AC= $\sqrt{10}$ hoặc AB= $\sqrt{10}$, AB= $\sqrt{5}$.

Lời giải B93. (lớp 8) Kẻ $AH \perp OB$. Đặt BH=x, AH=y. Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABH và AOH, ta tính được x, y.

BÀI TẬP THAM KHẢO

Áp dụng định lý cosin

Bài 63. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) a = bcosC + ccosC; b = acosC + ccosA; c = acosB + bcosA.

b) ab(a+b)cosC + bc(b+c)cosA + ca(c+a)cosB = $a^3 + b^3 + c^3$.

c) cosA + cosB = $\frac{a+b}{c}(1-\cos C)$.

Bài 64. (a+b)cosC + (b+c)cosA + (c+a)cosB= a+b+ c.

Bài 65. Một tam giác có độ dài các cạnh là $\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{b^2+c^2}, \sqrt{c^2+a^2}$ (a, b, c là 3 độ dài cho trước). Chứng minh rằng các góc của tam giác này đều nhọn.

HD. *Chứng minh rằng cosA, cosB, cosC > 0.*

Bài 66. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = k^2 + k + 1, b = 2k + 1, c = k^2 - 1$ $(k > 1)$. Tính góc A.

Bài 67. Các trung tuyến AM, BE, CF của tam giác ABC tương ứng bằng 5 cm, 4 cm, 3 cm. Tính các cạnh của tam giác và chứng minh $\hat{A} > 45^0$.

Bài 68. Cho tam giác có các cạnh thoả mãn: $a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}$ Tính góc A.

Bài 69. Cho tam giác ABC biết $m_a^2 + m_b^2 = m_c^2; h_a^2 + h_b^2 = h_c^2$. Tính *cosC* và CMR $\cos^2 A + \cos^2 B = 1$.

Bài 70. Gọi a, b, c là 3 cạnh của tam giác ABC và a^2, b^2, c^2 là độ dài tương ứng của các cạnh của tam giác A'B'C'.

a) Chứng minh rằng tam giác A'B'C' là tam giác nhọn.

b) (*) So sánh góc bé nhất của tam giác ABC với góc bé nhất của tam giác A'B'C'.

HD. Giả sử $a \le b \le c \to a^2 \le b^2 \le c^2$. Ta cm

cosA' – cosA = $\frac{(b^3 - c^3)(b - c) + a^2(bc - a)}{2b^2c^2} \ge 0 \to A' \le A$.

Bài 71. (*)Cho tứ giác ABCD có AB = $6\sqrt{3}, \hat{A} = 60^0, \hat{B} = 150^0, \hat{D} = 90^0$. Tính độ dài các cạnh AD, BC.

HD. *Đặt AD = x, BC = y.*

Đl cosin cho tam giác ABD và BDC ta tính BD^2 *và suy ra* $x^2 + 108 - 6\sqrt{3}x = 144 + y^2 - 12y$. *(1)*

Tương tự AC^2 *và suy ra* $x^2 + 144 = 108 + y^2 + 18y$. *(2)*

Giải (1), (2) được (x, y) = $(6\sqrt{3}; 6)$.

Bài 72. (*) Cho tam giác ABC. vẽ các đường phân giác AD, CE. Biết AC = 6, AF = 2, CD = 3. Tìm độ dài DF.

HD. *Tính được BF = 8/5; BD = 9/5. Tính được cosB = 0 rồi dùng đl Pitago tính FD =* $\frac{\sqrt{145}}{5}$.

Bài tập áp dụng định lý sin

Bài 73. Cho tam giác ABC có BC = a, $\angle BAC = \alpha$. Gọi O là tâm nội tiếp tam giác ABC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC theo a, α.

Bài 74. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng các tam giác ABH, ACH, BCH có bán kính các đường tròn ngoại tiếp bằng nhau.

Bài 75. Gọi r là độ dài bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $r = \frac{\sin B/2.\sin C/2}{\cos A/2}$. b) $\frac{a}{\sin 2A} = \frac{R}{\cos A}$.

Bài 76. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại E. Bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB, BEC, CED tương ứng bằng R_1, R_2, R_3. Tìm bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác AED.

HD. *Ta có AB + CD = BC + AD. Dùng đl sin trong các tam giác suy ra* $R = R_1 - R_2 + R_3$.

Bài 77. (*) Cho ΔABC. Trên cạnh AC lấy điểm E, trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho CE = BD. Gọi M là giao điểm của BC và DE. Chứng minh rằng $\frac{MD}{ME} = \frac{AC}{AB}$.

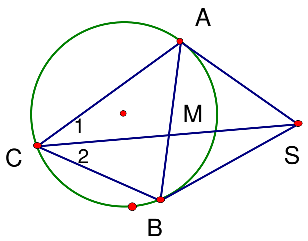
HD.

$$\Delta MBD \to \frac{MD}{\sin \angle MBD} = \frac{BD}{\sin\alpha}.\ \Delta EMC \to \frac{ME}{\sin \angle MCE} = \frac{EC}{\sin\alpha}.$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{BD\sin B} = \frac{ME}{EC\sin C} \Rightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB}.$$

Bài 78. (*)Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các tiếp tuyến với (O) tại A và B cắt nhau ở S, CS cắt AB tại M. Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB} = \frac{b^2}{a^2}$.

HD.



Tam giác AMC $\Rightarrow \frac{MA}{\sin C_1} = \frac{AC}{\sin M_1}$.

Tam giác BMC $\Rightarrow \frac{MB}{\sin C_2} = \frac{BC}{\sin M_2} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}\frac{\sin C_1}{\sin C_2}$.

Tam giác SAC , SBC $\to \frac{SA}{\sin C_1} = \frac{SC}{\sin(A+C)}; \frac{SB}{\sin C_2} = \frac{SC}{\sin(B+C)} \to \frac{\sin C_1}{\sin C_2} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{b}{a}$.

HỌC SINH GIỎI

Bài 79. (*)Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AB = a, BC = b, CD = c, AC = e, BD = f. CMR

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right).$$

HD. *Dùng đl cosin cho tam giác ADC, ABC và* $\hat{B} + \hat{D} = 180^0$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}; f^2 \le \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \to \frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2} \le \frac{ab+cd}{4abcd}+\frac{ad+cb}{4abcd} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\right) \le \frac{1}{8}\sum\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

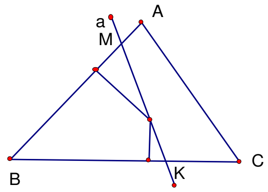
Bài 80. (Thuỵ Điển, 82) Tìm tất cả các số tự nhiên n để mỗi giá trị n tồn tại số tự nhiên m mà ΔABC có các cạnh AB = 33, AC = 21, BC = n và các điểm D, E lần lượt trên cạnh AB, AC thoả mãn: AD = DE = EC =m.

HD. *ΔADE suy ra 7 < m < 21.*

Áp dụng ĐL cosin với góc A của 2 ΔADE, ΔABC ta có $n^2 = 2233 - \frac{21.21.33}{m}$*, do giả thiết suy ra m =9, m =11. Thử được m = 11, n = 30.*

Bài 81. (Nam Tư,81) Một đường thẳng chia một tam giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau và có chu vi bằng nhau. CMR tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó nằm trên đường thẳng đó.

HD.



Chu vi tam giác BMK và đa giác AMKC suy ra :BM+ BK = AM+AC+CA

Suy ra $\frac{AM+KC}{AB+BC+CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{BMK}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$. Mặt khác giả sử r, r’ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đường tròn tiếp xúc với BA, BC và tâm nằm trên đường thẳng a. $\frac{S_{BMK}}{S_{ABC}} = \frac{BMr'+BKr'}{1/2(AB+BC+CA)r} \Rightarrow r' = r$

Bài 82. (Áo, 63) Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, AC và BC lần lượt lấy các điểm C’, B’, A’ sao cho các đoạn AA’, BB, CC’ đồng quy; các điểm A”, B”, C” lần lượt đối xứng với các điểm A, B, C qua A’, B’, C’. Chứng minh rằng: $S_{A"B"C"} = 3S_{ABC} + 4S_{A'B'C'}$.

Bài 83. (VN,79)

Tìm tất cả các bộ số tự nhiên (a, b, c) là độ dài 3 cạnh của một tam giác nội tiếp trong đường tròn tâm đường kính 6,25 (đvdd)

Bài 84. Đường tròn tâm I bán kính r tiếp xúc với 3 cạnh BC = a, CA = b, AB = c của tam giác ABC lần lượt tại M, N, P. Gọi S là diện tích của tam giác ABC. CMR:

a) $4S^2 = abMN^2 + bcNP^2 + caPM^2$

b) $\frac{MN^2}{h_a h_b} + \frac{NP^2}{h_b h_c} + \frac{PM^2}{h_c h_a} = 1.$

Bài 85. (Nam Tư, 76) Các đường cao của tam giác ABC nhọn cắt nhau tại O. Trên đoạn OB, OC người ta lấy 2 điểm B’, C’ sao cho: $\angle AB'C = \angle AC'B = 90^0$. CMR: AB’ = AC’.

Bài 86. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đặt AB = c, BC = a, CA = b, $A_1B_1 = c_1, B_1C_1 = a_1, C_1A_1 = b_1$. CMR: $\frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{a^2}{c_1^2} \ge 12.$

Bài 87. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác. CMR: $(HA+HB+HC)^2 \le a^2+b^2+c^2$.

Nhận dạng tam giác với học sinh lớp 10

(bằng đl sin, cosin)

1. Nhận dạng tam giác vuông

Chú ý . *Tam giác ABC vuông tại A* $\Leftrightarrow$ $c^2 + b^2 = a^2$

1. Nhận dạng tam giác ABC biết *2S=bc.*
2. Nhận dạng tam giác ABC biết

4S=(a+b-c)(a+c-b).

3. Nhận dạng tam giác ABC biết $\dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \sin A.$
4. Nhận dạng tam giác ABC biết $\dfrac{\sin C + \cos B}{\sin B + \cos C} = \tan C.$
5. Nhận dạng tam giác ABC biết $\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B.\sin C}$

2. Nhận dạng tam giác cân

Chú ý *Tam giác ABC cân tại A* $\Leftrightarrow$ $b = c$

6. Nhận dạng tam giác ABC biết $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A.$
7. Nhận dạng tam giác ABC biết *c =2a.cosB.*
8. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân nếu $\begin{cases} \sin B = (\sqrt{2} - \cos C)\sin A \\ \sin C = (\sqrt{2} - \cos B)\sin A. \end{cases}$
9. Nhận dạng tam giác ABC biết $\begin{cases} \sin A + \sin B = 2.\sin C \\ \cos A + \cos B = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$
10. Nhận dạng tam giác ABC biết $h_a = \sqrt{p(p-a)}.$
11. Nhận dạng tam giác ABC biết $\dfrac{h_a}{h_b} + \dfrac{h_b}{h_c} + \dfrac{h_c}{h_a} = \dfrac{h_b}{h_a} + \dfrac{h_a}{h_c} + \dfrac{h_c}{h_b}.$

3. Nhận dạng tam giác đều

12. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu $\begin{cases} \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b\cos C \end{cases}$
13. CMR tam giác ABC đều nếu

$$2\left(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C\right) = \sin A(\sin^2 B + \sin^2 C) + \sin B(\sin^2 C + \sin^2 A) + \sin C(\sin^2 A + \sin^2 B)$$

Bài tập

14. (CĐSP Hà Nam-05) CMR tam giác ABC thoả mãn: $\dfrac{(a+b)(b+c-a)(a-c-b)}{2abc} = \cos B$ thì tam giác ABC vuông.
15. (Dự bị 2-02)Tìm diện tích của tam giác ABC biết:

    bsinC(bcosC+cosB) = 20.
16. Cho ΔABC. CMR: cosA.cosBcosC $\le \dfrac{1}{8}$.
17. CMR tam giác ABC đều $\Leftrightarrow 3S = 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C).$

HD. *Chuyển sang hệ thức cạnh, đánh giá VP $\ge$ VT.*

18. Cho tam giác ABC thoả mãn:

acosB – bcosA = asinA – bsinB.

CMR tam giác ABC cân hoặc vuông.

19. Cho tam giác ABC thoả mãn:

$a\cos B - b\cos A = a\sin B - b\sin A$.

CMR tam giác ABC cân.