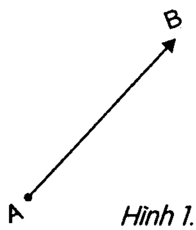
CHƯƠNG I

VECTƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

Vectơ là đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.



Hình 1.1

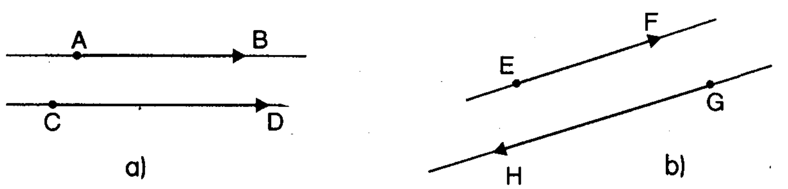
Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$. Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Độ dài của vectơ AB được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

Nếu không nói rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ ta còn kí hiệu vectơ là : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$....

Hai vectơ gọi là cùng phương nếu chúng nằm trên hai đường thẳng song song, hoặc cùng nằm trên một đường thẳng. (h.1.2)

Người ta còn nói hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



Hình 1.2

– Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng hướng. (h1.2a)

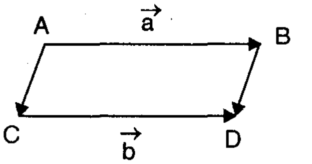
– Hai vectơ $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{GH}$ là hai vectơ ngược hướng. (h.1.2b).

Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Khi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau ta viết $\vec{a} = \vec{b}$.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

(do tính chất của hình bình hành *ABDC*).



Hình 1.3

Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Như vậy vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Cho trước điểm *A* và vectơ $\vec{a}$ thì ta dựng được điểm *B* duy nhất sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

B. GIẢI TOÁN

▶ **Ví dụ 1 :** Cho hai điểm phân biệt *A* và *B*. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng và bao nhiêu vectơ khác nhau ?

GIẢI

Một đoạn thẳng duy nhất *AB* hoặc *BA*.

Hai vectơ khác nhau là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

▶ **Ví dụ 2** : Cho hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Kết luận gì về ba điểm *A*, *B*, *C* ?

GIẢI

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương và có điểm *A* chung nên chúng cùng nằm trên một đường thẳng. Vậy ba điểm *A,B,C* thẳng hàng.

▶ **Ví dụ 3 :** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Gọi *M* là trung điểm của *BC* và *N* là trung điểm của *AC*.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ đúng hay sai ?

b) Các vectơ nào cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$? Các vectơ nào ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$?

c) Các vectơ nào bằng nhau ?

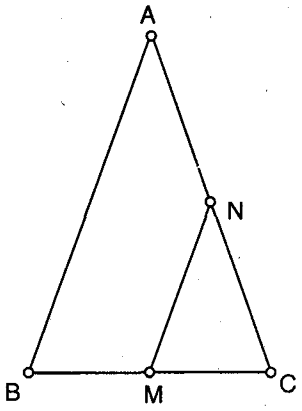
GIẢI

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên chúng không bằng nhau.

b) MN là đoạn nối trung điểm hai cạnh BC và AC nên MN và AB song song nhau. Vậy $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng hướng.

Ba điểm B, C, M thẳng hàng nên các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ là : $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MB}$.

c) Ta có : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ vì hai vectơ này cùng hướng và có độ dài bằng nhau. Ta cũng có : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$.

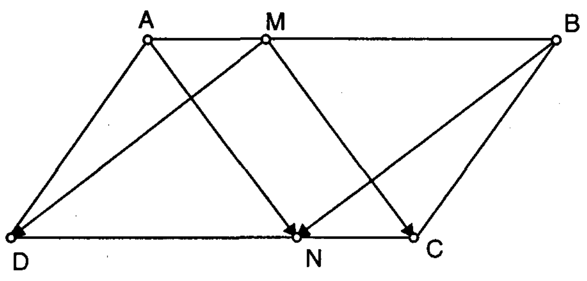


Hình 1.4

Ví dụ 4 : Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm M trên đoạn AB và điểm N trên đoạn CD sao cho $AM = CN$. Chứng minh $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$.

GIẢI

Ta có $AM = CN$ (theo gt) và $AM \parallel CN$ (vì $AB \parallel CD$).



Hình 1.5

Do đó tứ giác $AMCN$ là hình bình hành.

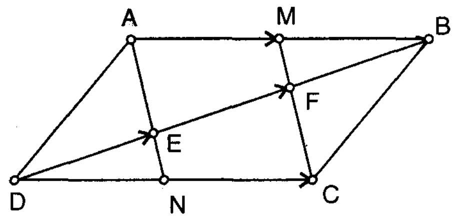
Vậy $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$.

Tương tự tứ giác $BMDN$ là hình bình hành. Vậy $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$.(h.1.5)

Ví dụ 5 : Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và DC. AN và CM lần lượt cắt BD tại E và F. Chứng minh $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ nên $AMCN$ là hình bình hành, do đó $AN // MC$. Suy ra MF là đường trung bình của ΔAEB và NE là đường trung bình của ΔDFC, từ đó ta có F là trung điểm của EB và E là trung điểm của DF. Vậy $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$. (h.1.6)



Hình 1.6

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1.1. Cho hai điểm phân biệt A và B. Câu nào sau đây đúng ?

a) Có một đoạn AB hay BA ;

b) Có hai vectơ khác nhau $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$;

c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = AB$;

d) Cả câu a, b và c đều đúng.

1.2. Cho điểm A. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

a) $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 4cm$;

b) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước.

1.3. Cho hình bình hành $ABCD$ và E là điểm đối xứng của C qua D. Chứng tỏ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

1.4. Cho nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AD. Chỉ ra các vectơ bằng với $\overrightarrow{BC}$.

1.5. Cho tam giác ABC và điểm M ở trong tam giác.Gọi A', B',C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và N, P, Q lần lượt là điểm đối xứng của M qua A', B', C'.

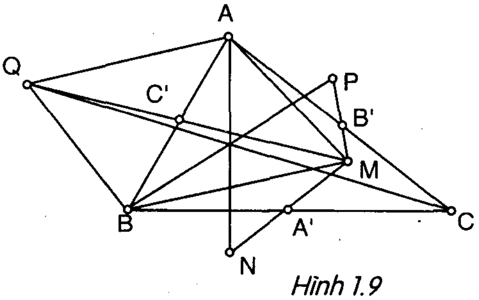
a) Chứng tỏ : $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$;

b) Chứng tỏ ba đường thẳng AN, BP, CQ đồng quy.

Tương tự tứ giác $MBNC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MB}$ (3)

Từ (1) và (3) ta có : $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CN}$.

Do đó tứ giác $ACNQ$ là hình bình hành. Vậy hai đường chéo AN và CQ giao nhau tại trung điểm I.



Hình 1.9

Mặt khác tứ giác $AMCP$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ (4)

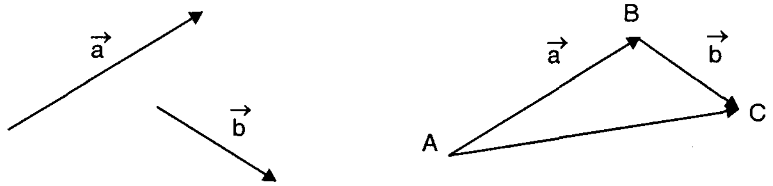
b) Từ (2) và (4) ta có $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PC}$.

Do đó tứ giác $BCPQ$ là hình bình hành nên hai đường chéo BP và CQ giao nhau tại trung điểm I. Vậy AN, BP và CQ đồng quy tại I.

§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa tổng của các vectơ : Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A tùy ý vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, rồi từ điểm B vẽ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ thì vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu : $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. (h.1.10)

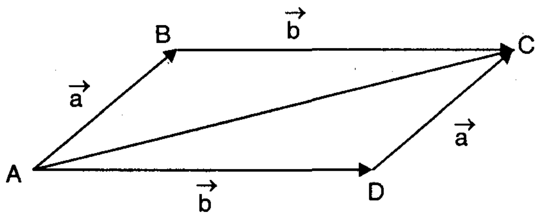


Hình 1.10

Như vậy ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ với A, B, C tuỳ ý (gọi là *quy tắc ba điểm*).

$ABCD$ là hình bình hành nên $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Như vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (gọi là *quy tắc hình bình hành*). (h.1.11)



Hình 1.11

2. **Tính chất** : a) Tính giao hoán : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

b) Tính kết hợp : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

c) với mọi $\vec{a}$ ta có : $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

d) $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (bất đẳng thức tam giác).

3. **Vectơ đối của một vectơ**

Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ ngược hướng với $\vec{a}$ và có cùng độ dài với $\vec{a}$.

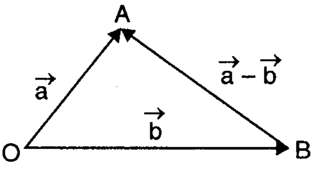
Kí hiệu : $-\vec{a}$.

Như vậy $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

4. **Hiệu của hai vectơ**

Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$, là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, tức là $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.



Hình 1.12

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (*quy tắc về hiệu vectơ*) với mọi điểm O, A, B.

B. GIẢI TOÁN

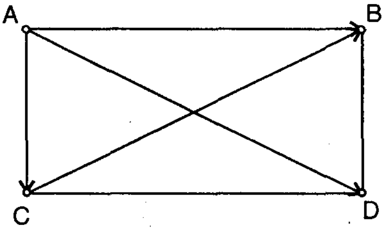
▶ **Ví dụ 1** : Cho tam giác ABC vuông tại A biết $AB = a$ và $AC = 2a$. Tính độ dài của vectơ tổng : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ và vectơ hiệu $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

GIẢI

Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ với AD là đường chéo hình bình hành $ABDC$. Mà góc A vuông nên $ABDC$ là hình chữ nhật. Do đó $AD = BC$. Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$= a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = BC = a\sqrt{5}$.



Hình 1.13

Theo quy tắc về hiệu vectơ ta có :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Vậy : $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = BC = a\sqrt{5}$.

▶ **Ví dụ 2 :** Cho bốn điểm bất kì *A, B, C, D*. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

GIẢI

a) Theo quy tắc ba điểm ta có :

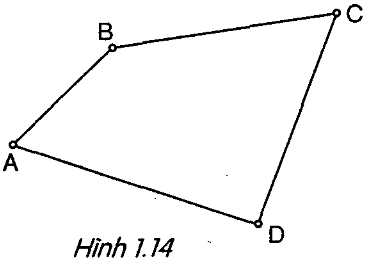
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \text{ và } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Do đó : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. (vì $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$).

b) Theo quy tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

(vì $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$).



Hình 1.14

c) Theo quy tắc về hiệu vectơ ta có :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.$$

Do đó : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$

$$= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

▶ **Ví dụ 3 :** Cho sáu điểm *A, B, C, D, E, F* tùy ý. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}.$$

GIẢI

Theo quy tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$$

Cộng theo vế 3 đẳng thức trên ta được : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

(vì $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FD}$ và $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$).

▶ **Ví dụ 4 :** Cho tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

GIẢI

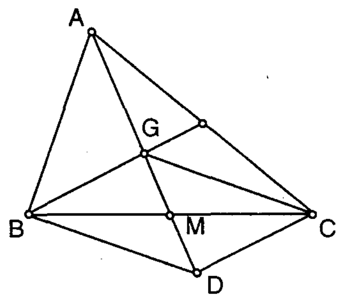
Vẽ hình bình hành $BGCD$, M là trung điểm của BC. Theo quy tắc hình bình hành ta có : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

mà $GD = 2GM$ (tính chất đường chéo)

và $GA = 2GM$ (tính chất trọng tâm)

nên $GD = GA$. Do đó $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GD}$.

Vậy : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. (h.1.15)



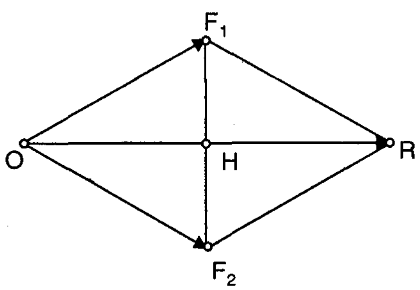
Hình 1.15

▶ **Ví dụ 5** : Cho hai lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ đều có cường độ là 50 N, có điểm đặt tại O và hợp với nhau một góc 60°. Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực này.

GIẢI

Theo quy tắc hình bình hành thì :

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{OR}$$



Hình 1.16

mà $OF_1 = OF_2 = 50$(N) nên OF_1RF_2 là hình thoi có góc O bằng 60° và hai đường chéo OR và F_1F_2 vuông góc với nhau tại trung điểm H.

Ta có $OH = 50\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều cạnh bằng 50).

Vậy $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{OR}\right| = OR = 2OH = 50\sqrt{3}$ N.

▶ **Ví dụ 6 :** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Chứng minh rằng :

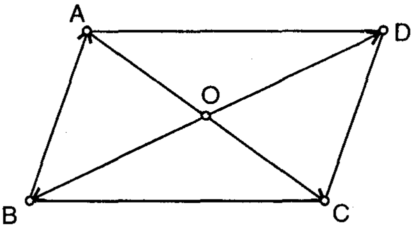
a) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$;   b) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

GIẢI

a) Theo quy tắc về hiệu vectơ ta có :

$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$

mà $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (vì $ABCD$ là hình bình hành) nên $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.



Hình 1.17

b) Ta có : $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ mà $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{BA}$.

Vậy : $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

▶ **Ví dụ 7** : Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính độ dài các vectơ :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}.$$

GIẢI

Theo quy tắc ba điểm ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = a$.

Theo quy tắc về hiệu vectơ ta có : $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = AB = a$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1.6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và M là điểm tuỳ ý. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$; b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

1.7. Cho tam giác ABC vuông tại A biết $AB = a$ và góc $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài các vectơ : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

1.8. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NA}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

1.9. Cho các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$.

a) Khi nào thì ta có : $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$;

b) Khi nào thì ta có : $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

1.10. Cho tam giác đều ABC cạnh a, đường cao AH. Tính độ dài các vectơ :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

1.11. Cho tam giác ABC. Nếu vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ nằm trên đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ thì tam giác ABC là tam giác gì ?

1.12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính độ dài các vectơ :

a) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

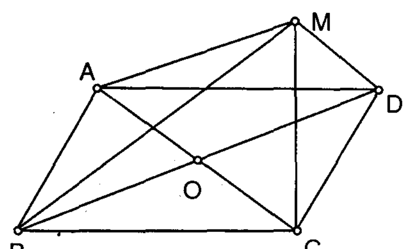
1.13. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt có cường độ 80 N và 60 N, có điểm đặt tại O và vuông góc với nhau. Tính cường độ lực tổng hợp của chúng.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1.6. a) Theo quy tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}$



Hình 1.18

và $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (hai vectơ đối nhau).

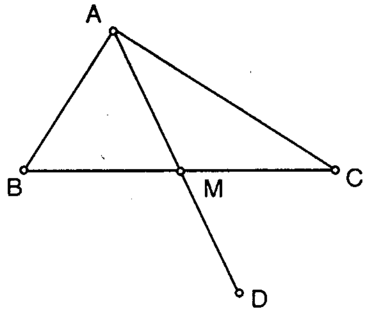
1.7. Tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{B} = 60^\circ$ là nửa tam giác đều có $BC = 2AB = 2a$.

a) Vẽ hình bình hành $ABDC$ ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \text{ và } AD = 2AM.$$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = 2AM = 2a.$

b) Ta có : $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = BC = 2a.$



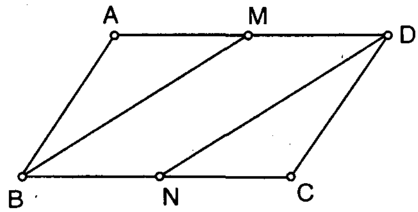
Hình 1.19

1.8. a) Ta có $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ND}$.

Tứ giác $MBND$ là hình bình hành nên :

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{ND}.$$

Vậy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$.



Hình 1.20

b) Ta có $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AD}$ mà $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$. Vậy $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$. (h.1.20)

1.9. a) Từ điểm A kẻ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ thì ta có :

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Do đó $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|$

hay $AC = AB + BC$. Điều này xảy ra khi A, B, C thẳng hàng theo thứ tự này. Vậy hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Từ điểm A kẻ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ khi đó $ABCD$ là hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành ta có : $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Theo quy tắc về hiệu vectơ ta có : $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{DB}$.

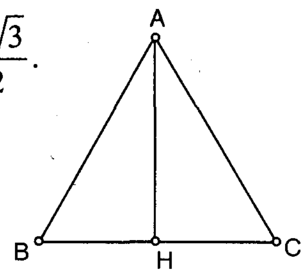
Do đó $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right|$ hay $AC = BD$.

Điều này xảy ra khi $ABCD$ là hình chữ nhật. Vậy AC vuông góc với BD hay hai giá của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

1.10. a) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên đường cao $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy độ dài ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}$) bằng $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hình 1.21

b) Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Vậy độ dài ($\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$) bằng $BC=a$.

c) Vẽ hình bình hành $ABDC$ thì ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Mà $AD=2AH=\sqrt{3}$.

Vậy độ dài ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$) bằng $AD=\sqrt{3}$. (h.1.21)

1.11. Tam giác ABC cân tại A.

1.12. a) Ta có $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

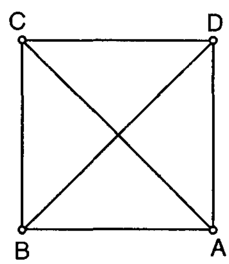
Vậy độ dài ($\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$) bằng $BC=a$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Vậy độ dài ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$) bằng $AC=a\sqrt{2}$

c) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

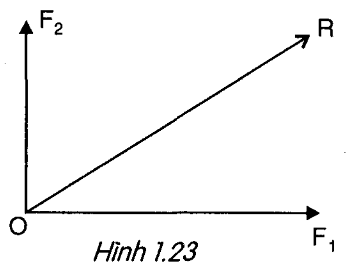
Vậy độ dài ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$) bằng $AC=a\sqrt{2}$. (h.1.22)



Hình 1.22

1.13. Vectơ hợp lực là tổng của hai vectơ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$.

F_1 vuông góc với F_2 nên vectơ tổng là đường chéo của hình chữ nhật OF_1RF_2. Ta có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OR}$.



Hình 1.23

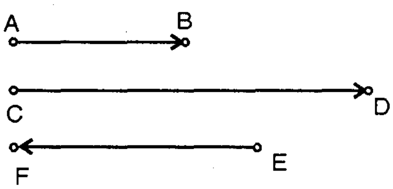
Mà $OR = F_1F_2 = \sqrt{60^2 + 80^2} = 10\sqrt{10}$.

Vậy cường độ lực tổng hợp $\overrightarrow{OR}$ bằng $10\sqrt{10}\,N$.

§3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa : Tích của vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với số thực $k \neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.



$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Hình 1.24

Ta quy ước $0.\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

2. Tính chất : Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l ta có :

a) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$

b) $(k + l).\ \vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

c) $k(l\vec{a}) = (k.l)\ \vec{a}$

d) $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\ \vec{a} = -\ \vec{a}$; $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

4. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là có số thực $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

5. Biểu thị (phân tích) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Nếu $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với $m, n \in \mathbb{R}$ thì ta nói vectơ $\vec{c}$ biểu thị được qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$; hay vectơ $\vec{c}$ được phân tích theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

B. GIẢI TOÁN

▶ **Ví dụ 1** : Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta luôn có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

GIẢI

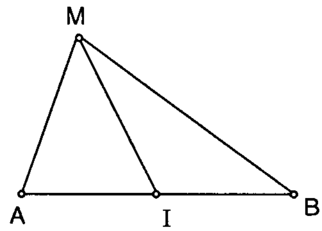
Theo quy tắc ba điểm ta có : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$

và $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.

Do đó : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.

Mà $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ vì I là trung điểm của AB.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. (h.1.25)



Hình 1.25

▶ **Ví dụ 2** : Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M tùy ý.

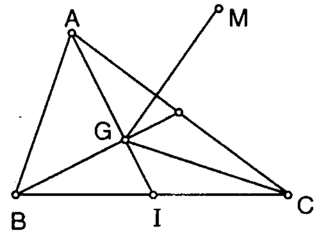
GIẢI

Theo quy tắc ba điểm thì với mọi điểm M ta có : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$;

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG}$

(vì theo ví dụ 4.§2 ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$). (h.1.26)



Hình 1.26

▶ **Ví dụ 3 :** Cho tam giác ABC. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn AB, BC và CA sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$; $BN = \frac{1}{3}BC$; $CP = \frac{1}{3}CA$.

Chứng minh : $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

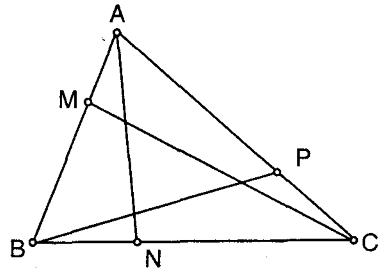
GIẢI

Ta có :

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad (3)$$



Hình 1.27

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được :

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}).$$

Mà $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

▶ **Ví dụ 4 :** Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thoả mãn $\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} & (1) \\ 2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c} = \vec{0} & (2) \end{cases}$

Chứng minh $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$.

GIẢI

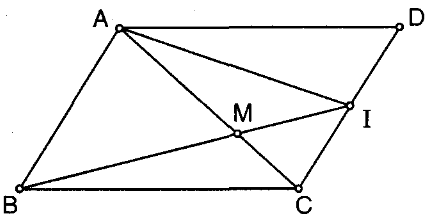
Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được :

$3\vec{a} + 5\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{5}{3}\vec{c}$. Vậy $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{c}$.

Từ (1) suy ra : $\vec{b} = -\vec{a} - \vec{c} = \frac{5}{3}\vec{c} - \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{c}$. Vậy $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$.

▶ **Ví dụ 5 :** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD. Lấy điểm M trên đoạn BI sao cho $BM = 2MI$. Chứng minh ba điểm A, M, C thẳng hàng.

GIẢI



Hình 1.28

Theo giả thiết ta có : $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MI}$.

Do đó, theo quy tắc hiệu vectơ ta có :

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM}).$$

Suy ra $\quad 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB}$.

I là trung điểm của CD nên theo ví dụ 1. ta có : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Vậy $\quad 3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.

Hệ thức này chứng tỏ A, M, C thẳng hàng. (h.1.28)

* **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

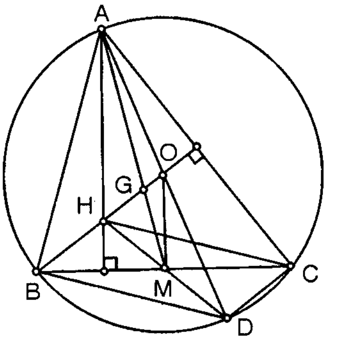
a) Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. Suy ra :

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} \;;$$

b) Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$;

c) Chứng minh ba điểm O, G, H thẳng hàng với G là trọng tâm của tam giác ABC.

GIẢI



Hình 1.29

a) Ta có : $BH \perp AC$ (vì H là trực tâm)

$DC \perp AC$ (vì AD là đường kính).

Do đó $BH \,//\, DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

Tương tự $CH \,//\, BD$ (vì cùng vuông góc với AB).

Vậy tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành ta có :

$$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}.$$

BC và HD là hai đường chéo của hình bình hành nên giao nhau tại trung điểm M.

Trong tam giác AHD, O là trung điểm của AD nên ta có :

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}.$$

Vậy $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$.

b) Theo quy tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} \; ; \; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} \; ; \; \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}.$$

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$ (1)

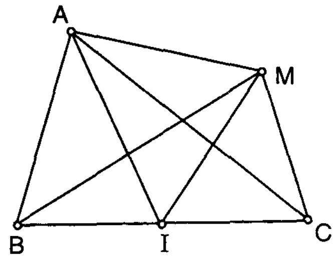
c) G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Vậy ba điểm O, G, H thẳng hàng (Đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, trọng tâm của tam giác được gọi là đường thẳng Ơ-le).

▶ ***Ví dụ 7 :** Cho tam giác ABC và I là trung điểm của BC. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn : $\left|2\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$.

GIẢI



I là trung điểm của BC nên ta có :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MA}\right| = \left|2\overrightarrow{MI}\right|$

$$\Leftrightarrow MA = MI.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của AI. (h.1.30)

Hình 1.30

▶ *** Ví dụ 8 :** Tìm điểm C trên đoạn AB sao cho : $\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Cho điểm M bất kì trong mặt phẳng và gọi $\overrightarrow{MN}$ là vectơ định bởi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$. Chứng tỏ đường thẳng MN qua một điểm cố định.

GIẢI

Ta có $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$. Do đó B là trung điểm của AC.

Ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} - 2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{MC}$

vì $\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Vậy M, N, C thẳng hàng. Suy ra đường thẳng MN qua điểm cố định C.

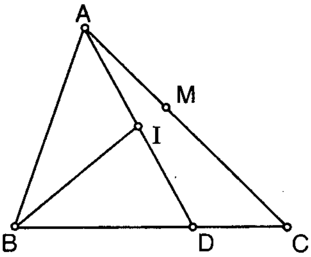
***Ví dụ 9 :** Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm định bởi $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của AD. Gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$ với x là số thực.

a) Tính $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$;

b) Tính $\overrightarrow{BM}$ theo $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$;

c) Tính x để ba điểm B, I, M thẳng hàng.

GIẢI



Hình 1.31

a) I là trung điểm của AD nên ta có :

$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

b) Ta có : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=x(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$.

Do đó : $\overrightarrow{BM}=(1-x)\overrightarrow{BA}+x\overrightarrow{BC}$.

c) Ba điểm B, I, M thẳng hàng khi có một số $k\neq 0$ sao cho :

$$\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow (1-x)\overrightarrow{BA}+x\overrightarrow{BC}=\frac{k}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Do đó : $2(1-x)=3x$. Vậy $x=\frac{2}{5}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1.14. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AO}$;

b) Cho M là điểm tuỳ ý, chứng minh : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

1.15. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$.

1.16. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

Chứng minh : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

1.17. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của AG.

Chứng minh : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{GI}=\vec{0}$.

***1.18.** Cho tam giác ABC có $AB = 3$ và $AC = 4$. Gọi AD là phân giác trong của góc A. Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

***1.19.** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và điểm H định bởi :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}.$$

Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC.

(Hướng dẫn : Chứng minh $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$ với M là trung điểm của BC).

1.20. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$.

1.21. Cho tam giác ABC trọng tâm G và I là trung điểm của AG. Lấy điểm K trên đoạn AC. Tính $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AC}$ để ba điểm B, I, K thẳng hàng.

***1.22.** Cho tam giác ABC.

a) Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}=\vec{0}$;

b) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=8$.

***1.23.** Cho tam giác ABC. Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$. Cho M là điểm bất kì và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$. Chứng minh đường thẳng MN đi qua điểm cố định.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

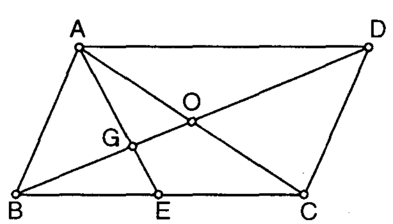
1.14. a) Gọi E là trung điểm của BC ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$

mà $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$$

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AO}$. (h.1.32)



Hình 1.32

1.15. N là trung điểm của BD nên ta có :

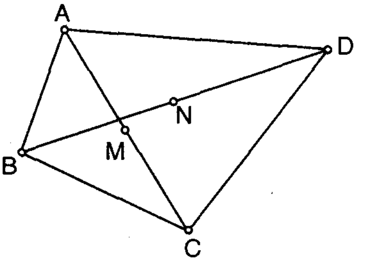
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AN}.$$

M là trung điểm của AC nên ta có :

$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}.$$

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})$.

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$. (h.1.33)



Hình 1.33

1.16 Theo quy tắc về hiệu vectơ ta có :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{GA'}-\overrightarrow{GA}\ ;\ \overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{GB'}-\overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{GC'}-\overrightarrow{GC}.$$

Do đó : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$.

Mà G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên theo ví dụ 2. ta có : $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

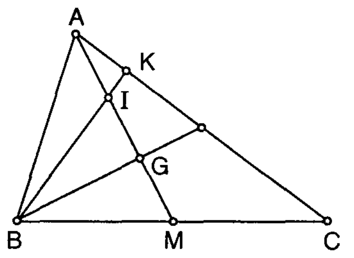
Vậy $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

1.17. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}$

(M là trung điểm của BC).

I là trung điểm của AG nên $\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{GI}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{GI}=\vec{0}$. (h.1.34)

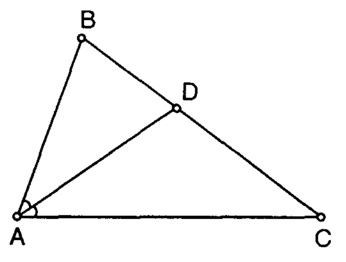


Hình 1.34

***1.18.** Theo tính chất đường phân giác trong của góc A trong tam giác ABC ta có :

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}.$$

Do đó $3DC = 4DB$ mà hai vectơ $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng nên ta có :



Hình 1.35

$3\overrightarrow{DC}=-4\overrightarrow{DB}\ \Leftrightarrow\ 3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=-4(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

$\Leftrightarrow\ 7\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AD}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$. (h.1.35)

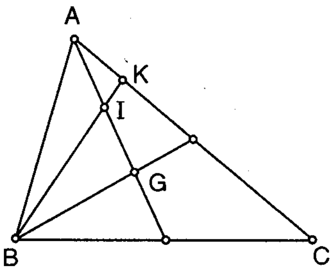
***1.19.** Xem ví dụ 6 trong phần giải toán.

1.20. G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}.$$

Vậy $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

1.21. I là trung điểm của AG nên



Hình 1.36

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BI}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}.$$

Đặt $\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AC}$ thì ta có :

$$\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{BA}=x(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BK}=(1-x)\overrightarrow{BA}+x\overrightarrow{BC}.$$

Vậy B, I, K thẳng hàng khi có một số $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{BK}=k\overrightarrow{BI}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(1-x)=6x \Leftrightarrow 15x=3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}.$$

***1.22.** a) Ta có : $\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA}=-3\overrightarrow{DB}$.

Vậy D chia đoạn AB theo tỉ số -3.

b) Ta có : $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=8 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+3(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB})\right|=8$

$$\Leftrightarrow \left|4\overrightarrow{MD}\right|=8 \Leftrightarrow DM=2.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm D bán kính bằng 2.

*** 1.23.** Ta có : $\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{DC}$.

Vậy điểm D chia đoạn BC theo tỉ số 3.

Ta có : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}-3(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=-2\overrightarrow{MD}.$$

Vậy đường thẳng MN đi qua điểm D cố định.