

TRƯỜNG THPT GÒ CÔNG ĐÔNG

TÀI LIỆU HỌC TẬP

Hình Học 10

CHƯƠNG I: VECTOR



✍ GV: Trần Duy Thái

WWW.VNMATH.COM

§ 1 : CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

- Vectơ là đoạn thẳng có hướng. Ký hiệu : \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD} hoặc \vec{a} ; \vec{b}
- Vectơ – không là vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối. Ký hiệu $\vec{0}$.
- Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- Hai vectơ cùng phương là hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng
- Hai vectơ cùng hướng thì luôn cùng phương.
- Độ dài vectơ \overrightarrow{AB} chính là độ dài đoạn thẳng AB. Kí hiệu: $|\overrightarrow{AB}| = AB$
- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài

$$\text{Vậy: } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng} \end{cases}$$

* Các phương pháp chứng minh:

- Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- Chứng minh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP:

* Dạng 1: Xác định một vectơ, sự cùng phương và hướng của hai vectơ

☞ Phương pháp giải:

- Để xác định vectơ ta cần biết độ dài và hướng của vectơ, hoặc biết điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Ví dụ 2 điểm phân biệt A, B ta có 2 vectơ khác nhau là \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BA} .
- Vectơ \vec{a} là vectơ-không khi và chỉ khi $|\vec{a}| = 0$ hoặc $\vec{a} = \overrightarrow{AA}$ với A là điểm bất kì.

☞ Bài tập:

Bài 1: Cho $\triangle ABC$. Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ các cạnh của tam giác đó.

Bài 2: Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ 4 điểm đã cho.

Bài 3: Cho ngũ giác ABCDE.

- Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ các cạnh và đường chéo của ngũ giác.
- Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ các đỉnh của ngũ giác.

* Dạng 2: Khảo sát sự bằng nhau của 2 vectơ.

☞ Phương pháp giải: Để chứng minh 2 vectơ bằng nhau có 3 cách:

$$\bullet \left. \begin{array}{l} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

- $ABCD$ là hbh $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{DC}$ và $\overline{BC} = \overline{AD}$
- Nếu $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c}$

Bài tập:

Bài 1: Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tìm các vectơ bằng nhau và chứng minh.

Bài 2: Cho điểm M và \vec{a} . Dựng điểm N sao cho:

- a). $\overline{MN} = \vec{a}$ b). \overline{MN} cùng phương với \vec{a} và có độ dài bằng \vec{a} .

Bài 3: Cho hình vuông ABCD tâm O. Liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau (khác $\vec{0}$) nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng nếu $\overline{MN} = \overline{AB}$ và $\overline{MN} = \overline{DC}$, thì ABCD là hình bình hành.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD, chứng minh rằng nếu $\overline{AB} = \overline{DC}$ thì $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với C qua D. Chứng tỏ: $\overline{AE} = \overline{BD}$.

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M trên đoạn AB và điểm N trên đoạn CD sao cho $AM=CN$. Chứng minh: $\overline{AN} = \overline{MC}$ và $\overline{MD} = \overline{BN}$.

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

AN và CM lần lượt cắt BD tại E và F. Chứng minh rằng: $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$.

Bài 9: Cho tam giác ABC và điểm M ở trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và M, N, P lần lượt là các điểm đối xứng với M qua A', B', C'. Chứng minh:

- a). $\overline{AQ} = \overline{CN}$ và $\overline{AM} = \overline{PC}$ b). AN, BP, CQ đồng quy.

Bài 10: Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O.

- a). Tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với \overline{OA} .
- b). Tìm các vectơ bằng vectơ $\overline{AB}, \overline{OE}$.

Bài 11: Cho hình bình hành ABCD có tâm là O. Tìm các vectơ từ 5 điểm A, B, C, D, O:

- a). Bằng vectơ $\overline{AB}; \overline{OB}$. b). Có độ dài bằng $|\overline{OB}|$.

Bài 12: Cho tam giác đều ABC. Các đẳng thức sau đây đúng hay sai?

- a). $\overline{AB} = \overline{BC}$ b). $\overline{AB} = -\overline{AC}$ c). $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$

Bài 13: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.

Chứng minh: $\overline{MN} = \overline{QP}; \overline{NP} = \overline{MQ}$.

Bài 14: Cho hình bình hành ABCD. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Gọi I là giao điểm AM và BN, K là giao điểm DM và CN.

CMR: $\overline{AM} = \overline{NC}, \overline{DK} = \overline{NI}$.

Bài 15: Cho tam giác ABC có trực tâm H và O tâm là đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng B qua O. Chứng minh: $\overline{AH} = \overline{B'C}$.

§ 2 : TỔNG VÀ HIỆU CỦA CÁC VECTO

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

* **Định nghĩa:** Cho $\overline{AB} = \vec{a}; \overline{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

* **Tính chất:** * Giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
 * Kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

* Tính chất vectơ - không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

* **Quy tắc 3 điểm:** Cho A, B, O tùy ý, ta có:

- $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$ (phép cộng)
- $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ (phép trừ)

* **Quy tắc hình bình hành:** Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$

* **Vecto đối:** Vectơ đối của vectơ \vec{a} là một vectơ có cùng độ dài nhưng ngược hướng.

Kí hiệu: $-\vec{a}$. Vậy $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Chú ý: $\overline{AB} = -\overline{BA}$

* **Tính chất trung điểm và tính chất trọng tâm:**

- I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$
- G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP:

* **Dạng 1: Tìm tổng của hai vectơ và tổng của nhiều vectơ**

Phương pháp giải:

Dùng định nghĩa tổng của 2 vectơ, quy tắc 3 điểm, quy tắc hbh và các tính chất của tổng các vectơ

Bài tập:

Bài 1: Cho hbh ABCD. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD.

- a). Tìm tổng của 2 vectơ \overline{NC} và \overline{MC} ; \overline{AM} và \overline{CD} ; \overline{AD} và \overline{NC} .
- b). Chứng minh $\overline{AM} + \overline{AN} = \overline{AB} + \overline{AD}$.

Bài 2: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Chứng minh

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} = \vec{0}$.

Bài 3: Cho năm điểm A, B, C, D, E. Hãy tính tổng $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$.

* **Dạng 2: Tìm vectơ đối và hiệu của 2 vectơ**

Phương pháp giải:

- Theo định nghĩa, tìm hiệu $\vec{a} - \vec{b}$, ta làm hai bước sau:
 - Tìm vectơ đối của \vec{b}

- Tính tổng $\vec{a} + (-\vec{b})$

- Vận dụng quy tắc $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ với ba điểm O, A, B bất kì.

☛ Bài Tập:

Bài 1: Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC.

- Tìm hiệu $\vec{AM} - \vec{AN}, \vec{MN} - \vec{NC}, \vec{MN} - \vec{PN}, \vec{BP} - \vec{CP}$.
- Phân tích \vec{AM} theo 2 vectơ \vec{MN} và \vec{MP} .

Bài 2: Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$

Bài 3: Cho 2 điểm phân biệt A và B. Tìm điểm M thỏa mãn 1 trong các điều kiện sau:

- $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$
- $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{AB}$
- $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

Bài 4: Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} = -\vec{IB}$.

*** Dạng 3: Chứng minh đẳng thức vector:**

☛ Phương pháp giải:

+ Sử dụng qui tắc ba điểm; quy tắc hình bình hành; trung điểm.
 + Vận dụng các chứng minh đẳng thức: biến đổi VT thành VP và ngược lại; biến đổi hai vế cùng thành một đẳng thức; biến đổi đẳng thức đã cho thành một đẳng thức luôn đúng.

☛ Bài tập:

Bài 1: Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D. Chứng minh các đẳng thức sau:

- $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$
- $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$
- $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$

Bài 2: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{EF} = \vec{AF} + \vec{BC} + \vec{ED}$$

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Chứng minh:

$$\vec{BD} - \vec{BA} = \vec{OC} - \vec{OB} \text{ và } \vec{BC} - \vec{BD} + \vec{BA} = \vec{0}$$

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD tâm O. M là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\vec{AB} + \vec{OA} = \vec{OB} \text{ và } \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$$

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M và N là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:

- $\vec{AD} + \vec{MB} + \vec{NA} = \vec{0}$
- $\vec{CD} - \vec{CA} + \vec{CB} = \vec{0}$

Bài 6: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. CMR: (Bằng nhiều cách khác nhau)

- $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$
- $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{DB}$
- $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$
- $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$
- $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$
- $\vec{AC} + \vec{DE} - \vec{DC} - \vec{CE} + \vec{CB} = \vec{AB}$

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD, M tùy ý. Cm: $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$

Bài 8: ΔABC có G là trọng tâm, các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh $\vec{GM} + \vec{GN} + \vec{GP} = \vec{0}$

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD có tâm O. CMR:

- $\vec{CO} - \vec{OB} = \vec{BA}$
- $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$
- $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{OD} - \vec{OC}$
- $\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$

Bài 10: Cho ΔABC . Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh: $\vec{RJ} + \vec{IQ} + \vec{PS} = \vec{0}$.

Bài 11: Cho lục giác đều ABCDEF có tâm là O. CMR:

- $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$
- $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OE} = \vec{0}$
- $\vec{AB} + \vec{AO} + \vec{AF} = \vec{AD}$
- $\vec{MA} + \vec{MC} + \vec{ME} = \vec{MB} + \vec{MD} + \vec{MF}$ (M tùy ý)

Bài 12: Cho 7 điểm A; B; C; D; E; F; G. Chứng minh rằng:

- $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$
- $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$
- $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} + \vec{GA} = \vec{CB} + \vec{ED} + \vec{GF}$
- $\vec{AB} - \vec{AF} + \vec{CD} - \vec{CB} + \vec{EF} - \vec{ED} = \vec{0}$

Bài 13: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là trung điểm AB, AC, BC. CMR: với điểm O bất kì: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$

Bài 14: Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng của B qua A, B' là điểm đối xứng với C qua B, C' là điểm đối xứng của A qua C. Với một điểm O bất kỳ, CMR:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'}$$

Bài 15: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, trực tâm H, vẽ đường kính AD

- Chứng minh rằng $\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{HD}$
- Gọi H' là đối xứng của H qua O. Chứng minh rằng $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{HH'}$

Bài 16: CMR: $\vec{AB} = \vec{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Bài 17: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Đặt $\vec{AO} = \vec{a}$; $\vec{BO} = \vec{b}$

Tính \vec{AB} ; \vec{BC} ; \vec{CD} ; \vec{DA} theo \vec{a} và \vec{b}

Bài 18: Cho tam giác ABC. Xác định điểm M sao cho $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

*** Dạng 4: Tính độ dài của vector:**

☛ Phương pháp giải:

Đưa tổng hoặc hiệu của các vector về một vector có độ dài là một cạnh của đa giác.

☛ Bài tập:

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A biết AB=a, AC=2a. Tính: $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ và $|\vec{AB} - \vec{AC}|$

Bài 2: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính: $|\vec{AB} + \vec{BC}|$ và $|\vec{CA} - \vec{CB}|$.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A biết $AB=a$ và $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính: $|\overline{AB} + \overline{BC}|$ và $|\overline{AB} - \overline{AC}|$.

Bài 4: Cho tam giác đều ABC cạnh a và đường cao AH. Tính: $|\overline{AB} + \overline{AC}|$; $|\overline{AB} + \overline{BH}|$; $|\overline{AB} - \overline{AC}|$.

Bài 5: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính $|\overline{BC} + \overline{AB}|$; $|\overline{AB} - \overline{AC}|$ theo a

Bài 6: Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Tính:

a. $|\overline{AB} + \overline{AD}|$ b. $|\overline{BA} - \overline{BC}|$ c. $|\overline{OB} - \overline{DC}|$

Bài 7: Cho hình vuông ABCD cạnh a có O là giao điểm hai đường chéo. Tính

a. $|\overline{OA} - \overline{CB}|$ b. $|\overline{AB} + \overline{DC}|$ c. $|\overline{CD} - \overline{DA}|$

Bài 8: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a. Với M tùy ý, Hãy chứng minh $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$

b. Chứng minh rằng: $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AB} - \overline{AD}|$

Bài 9: Cho 2 véc tơ \vec{a} và \vec{b} cùng khác $\vec{0}$. Khi nào thì:

a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; b) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; c) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$

Bài 10: Tìm tính chất tam giác ABC, biết rằng: $|\overline{CA} + \overline{CB}| = |\overline{CA} - \overline{CB}|$

§ 3. TÍCH CỦA VECTO VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

* Cho số thực $k \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của một số thực k và vectơ \vec{a} là 1 vectơ, kí hiệu:

$k\vec{a}$ và được xác định:

➤ Nếu $k > 0$ thì $k\vec{a}$ cùng hướng với \vec{a} ; $k < 0$ thì $k\vec{a}$ ngược hướng với \vec{a} .

➤ Độ dài: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

* **Tính chất:**

a). $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

b). $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$

c). $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

d). $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k=0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$

• \vec{b} cùng phương \vec{a} ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa $\vec{b} = k\vec{a}$.

• Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overline{AB} = k\overline{AC}$.

• Tính chất trung điểm và tính chất trọng tâm:

➤ I trung điểm đoạn thẳng AB, với mọi điểm M bất kỳ: $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$.

➤ G là trọng tâm ΔABC , với mọi điểm M bất kỳ: $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$.

• Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương:

➤ Cho \vec{b}, \vec{a} là hai vectơ không cùng phương, với mọi \vec{x} tùy ý, khi đó:

$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (m, n duy nhất).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP:

* **Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vectơ:**

Bài 1: Cho hình bình hành ABCD. Cmr: $\overline{AB} + 2\overline{AC} + \overline{AD} = 3\overline{AC}$

Bài 2: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, D là trung điểm của AM. Cm:

a). $2\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} = \vec{0}$

b). $2\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 4\overline{OD}$ (với O tùy ý)

Bài 3: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. CMR: $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$, với M bất kỳ.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của 2 đường chéo AC và BD. CMR: $\overline{AB} + \overline{CD} = 2\overline{MN}$

Bài 5: Gọi I, J lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD.

Chứng minh rằng: $2\overline{IJ} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

Bài 6: CMR nếu G và G' lần lượt là trọng tâm của ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $3\overline{GG'} = \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'}$

Bài 7: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm EF.

CMR: a). $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$ b). $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$

c). $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 4\overline{MO}$ (M là điểm bất kỳ)

Bài 8: Gọi M, N là trung điểm AB và CD của tứ giác ABCD. Cmr:

$2\overline{MN} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Bài 9: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

CMR: $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \vec{0}$.

Bài 10: CMR: nếu G và G' là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$

thì $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\overline{GG'}$. Suy ra điều kiện để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 11: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$.

Bài 12: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O.

a). Chứng minh tứ giác HCDB là hình bình hành.

b). Chứng minh:

$$\overline{HA} + \overline{HD} = 2\overline{HO}, \overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}, \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH}.$$

c). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. CMR: $\overline{OH} = 3\overline{OG}$.

Từ đó có kết luận gì về 3 điểm O, H, G.

Bài 13: Cho tứ giác ABCD.

a). Gọi M, N là trung điểm AD, BC, chứng minh: $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$

b). Gọi O là điểm nằm trên đoạn MN và OM = 2ON.

$$\text{CMR: } \overline{OA} - 2\overline{OB} - 2\overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$$

Bài 14: Cho tam giác A, B, C. G là trọng tâm của tam giác và M là một điểm tùy ý trong mặt phẳng. CMR:

$$\text{a). } \overline{GB} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0} \quad \text{b). } \overline{MB} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}.$$

Bài 15: Cho hình bình hành ABCD tâm I. $\overline{AO} = \vec{a}; \overline{BO} = \vec{b}$

a). Chứng minh rằng: $\overline{AB} + \overline{AD} = 2\overline{AI}$

b). Tính $\overline{AC}; \overline{BD}; \overline{AB}; \overline{BC}; \overline{CD}; \overline{DA}$ theo $\vec{a}; \vec{b}$.

Bài 16: Cho 4 điểm A, B, C, D; M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng: $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{AC} + \overline{BC} = 4\overline{MN}$.

Bài 17: Gọi O; H; G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm; trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng: a) $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}$ b) $\overline{HG} = 2\overline{GO}$.

Bài 18: Cho tam giác đều ABC tâm O. M là một điểm tùy ý bên trong tam giác; D, E, F lần lượt là hình chiếu của nó trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF} = \frac{3}{2}\overline{MO}.$$

Bài 19: Cho 4 điểm A, B, C, D; I, F lần lượt là trung điểm của BC, CD. CM:

$$2(\overline{AB} + \overline{AI} + \overline{FA} + \overline{DA}) = 3\overline{DB}.$$

Bài 20: Cho tam giác ABC với G là trọng tâm; H là điểm đối xứng với B qua G. CM:

$$\text{a). } \overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}; \quad \overline{CH} = -\frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC}).$$

$$\text{b). M là trung điểm của BC. CM: } \overline{MH} = \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{5}{6}\overline{AB}.$$

* **Dạng 2: Tìm một điểm thỏa một đẳng thức vecto cho trước.**

* **Phương pháp tìm điểm M thỏa một đẳng thức vecto cho trước:**

- B_1 : Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng: $\overline{AM} = \vec{u}$, trong đó A là điểm cố định, \vec{u} cố định.
- B_2 : Dụng điểm M thỏa $\overline{AM} = \vec{u}$.

Bài Tập:

Bài 1: Cho hai điểm phân biệt A và B. tìm điểm K sao cho: $3\overline{KA} + 2\overline{KB} = \vec{0}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC.

a). Tìm điểm I sao cho $\overline{IA} + 2\overline{IB} = \vec{0}$

b). Tìm điểm O sao cho $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$

c). Tìm điểm K sao cho $\overline{KA} + 2\overline{KB} = \overline{CB}$

d). Tìm điểm M sao cho $\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = \vec{0}$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm O sao cho $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$

Bài 4: Cho tam giác ABC.

a). Tìm điểm I sao cho $2\overline{IB} + 3\overline{IC} = \vec{0}$

b). Tìm điểm J sao cho $\overline{JA} - \overline{JB} - 2\overline{JC} = \vec{0}$

c). Tìm điểm K sao cho $\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} = \overline{BC}$

d). Tìm điểm K sao cho $\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} = 2\overline{BC}$

e). Tìm điểm L sao cho $3\overline{LA} - \overline{LB} + 2\overline{LC} = \vec{0}$

HD:

c). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó với mọi K ta có: $\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} = 3\overline{KG}$

e). $3\overline{LA} - \overline{LB} + 2\overline{LC} = (\overline{LA} - \overline{LB}) + 2(\overline{LA} + \overline{LC})$. Sau đó áp dụng quy tắc 3 điểm và hệ thức trung điểm.

Bài 5: Cho hai điểm A, B. Xác định điểm M biết: $2\overline{MA} - 3\overline{MB} = \vec{0}$

Bài 6: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$.

a). Xác định điểm K sao cho: $3\overline{AB} + 2\overline{AC} - 12\overline{AK} = \vec{0}$

b). Xác định điểm D sao cho: $3\overline{AB} + 4\overline{AC} - 12\overline{KD} = \vec{0}$

Bài 7: Cho các điểm A, B, C, D, E. Xác định các điểm O, I, K sao cho:

a). $\overline{OA} + 2\overline{OB} + 3\overline{OC} = \vec{0}$

b). $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} + \overline{ID} = \vec{0}$

c). $\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} + 3(\overline{KD} + \overline{KE}) = \vec{0}$

Bài 8: Cho tam giác ABC. Xác định các điểm M, N sao cho:

a). $\overline{MA} + 2\overline{MB} = \vec{0}$

b). $\overline{NA} + 2\overline{NB} = \overline{CB}$.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD. Xác định điểm M thỏa mãn:

$$3\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}.$$

Bài 10: Cho tứ giác ABCD. Xác định vị trí điểm O thỏa mãn: $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$

* **Dạng 3: Phân tích một vecto theo hai vecto không cùng phương.**

* **Phương pháp:** Áp dụng các kiến thức:

* **Quy tắc 3 điểm:** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (phép cộng)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \text{ (phép trừ)}$$

* **Quy tắc đường chéo hình bình hành:** Nếu ABCD là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

* **Tính chất trung điểm:** I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \text{ (M bất kỳ)}$$

* **Tính chất trọng tâm:** G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \text{ (M bất kỳ)}$$

☛ **Bài Tập:**

Bài 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Cho các điểm D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. I là giao điểm AD và EF. Hãy phân tích các vecto $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Hãy phân tích vecto \overrightarrow{AM} theo hai vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bài 3: Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Hãy phân tích vecto \overrightarrow{AM} theo hai vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bài 4: Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BM}$.

Bài 5: Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của đoạn AG, K là điểm trên cạnh AB sao cho $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CK}$ theo $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$.

Bài 6: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O cạnh a.

a. Phân tích vecto \overrightarrow{AD} theo hai vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}$.

b. Tính độ dài $|\vec{u}| = \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right|$ theo a.

Bài 7: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Phân tích \overrightarrow{AM} theo hai vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bài 8: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho NA = 2NC. Gọi K là trung điểm MN. Phân tích vecto \overrightarrow{AK} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bài 9: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho NC = 2NA. Gọi K là trung điểm MN.

a. Phân tích vecto \overrightarrow{AK} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b. Gọi D là trung điểm BC. Cm: $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 10: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P là trung điểm BC,CA,AB. Tính các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vecto $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$

Bài 11: Cho hình vuông ABCD, E là trung điểm CD. Hãy phân tích \overrightarrow{AE} theo hai vecto $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$.

Bài 12: Cho tam giác ABC, gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng của B qua G.

a). Chứng minh: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

b). Gọi M là trung điểm BC, chứng minh: $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 13: Cho hình bình hành ABCD, tâm O. đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Hãy tính các vecto sau đây theo \vec{a}, \vec{b} .

a). \overrightarrow{AI} (I là trung điểm BO).

b). \overrightarrow{BG} (G là trọng tâm tam giác OCD).

$$* \text{ĐS: } \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \quad \overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$$

Bài 14: Cho tam giác ABC và G là trọng tâm. B₁ đối xứng với B qua G. M là trung điểm BC. Hãy biểu diễn các véc tơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{MB_1}$ qua hai véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bài 15: Cho tam giác ABC, gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI = 3BI và J thuộc BC kéo dài sao cho 5JB = 2JC.

a). Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó biểu diễn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

b). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính \overrightarrow{AG} theo $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

* **Dạng 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng:**

* **Phương pháp:** Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Để chứng minh được điều này ta có thể áp dụng một trong hai phương pháp:

+ Cách 1: Áp dụng các quy tắc biến đổi véc tơ.

+ Cách 2: Xác định hai véc tơ trên thông qua tổ hợp trung gian.

Bài Tập:

Bài 1 : Cho 4 điểm O, A, B, C sao cho $3\vec{OA} - 2\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{0}$. CMR: A, B, C thẳng hàng.

Bài 2 : Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm AM và K là một điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3} AC$.

- a). Phân tích vecto \vec{BK}, \vec{BI} theo hai vecto \vec{BA}, \vec{BC}
- b). Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Bài 3: Cho ΔABC . I là điểm trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4} AC$, J là điểm mà

$$\vec{BJ} = \frac{1}{2} \vec{AC} - \frac{2}{3} \vec{AB}$$

- a). Chứng minh rằng $\vec{BI} = \frac{3}{4} \vec{AC} - \vec{AB}$
- b). Chứng minh B, I, J thẳng hàng.

Bài 4: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC; D và E là hai điểm sao cho:

$$\vec{BD} = \vec{DE} = \vec{EC}$$

- a). Chứng minh: $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AE}$.
- b). Tính vectơ: $\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC} + \vec{AE}$ theo \vec{AI} .
- c). Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Bài 5: Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{AB} = \vec{u}; \vec{AC} = \vec{v}$

- a). Gọi P là điểm đối xứng với B qua C. Tính \vec{AP} theo $\vec{u}; \vec{v}$?
- b). Gọi Q và R là hai điểm định bởi: $\vec{AQ} = \frac{1}{2} \vec{AC}; \vec{AR} = \frac{1}{3} \vec{AB}$. Tính $\vec{RP}; \vec{RQ}$ theo $\vec{u}; \vec{v}$.
- c). Suy ra P, Q, R thẳng hàng.

Bài 6: Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Lấy điểm I, J sao cho: $2\vec{IA} + 3\vec{IC} = \vec{0}$,

$$2\vec{JA} + 5\vec{JB} + 3\vec{JC} = \vec{0}$$

- a). CMR: M, N, J thẳng hàng với M, N là trung điểm của AB và BC.
- b). CMR: J là trung điểm của BI.

Bài 7: Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Lấy các điểm I, J thỏa mãn: $\vec{IA} = 2\vec{IB}; 3\vec{JA} + 2\vec{JC} = \vec{0}$. Chứng minh IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 8: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm M, N, P thỏa mãn: $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

$$3\vec{AN} - 2\vec{AC} = \vec{0}; \vec{PB} = 2\vec{PC}$$
. Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD. Lấy các điểm I, J thỏa mãn: $3\vec{JA} + 2\vec{JC} - 2\vec{JD} = \vec{0}$
 $\vec{JA} - 2\vec{JB} + 2\vec{JC} = \vec{0}$.

Chứng minh: I, J, O thẳng hàng với O là giao điểm của AC và BD.

Bài 10: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm M, N, P sao cho: $\vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}, \vec{AN} = 3\vec{NC}, \vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 11: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $\vec{AM} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$. Chứng minh B, M, C thẳng hàng

Bài 12: Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{2} MB, AN = 3NC$ và điểm P xác định bởi hệ thức $4\vec{PB} + 9\vec{PC} = \vec{0}$. Gọi K là trung điểm MN.

- a). Chứng minh: $\vec{AK} = \frac{1}{6} \vec{AB} + \frac{3}{8} \vec{AC}$.
- b). Chứng minh: Ba điểm A, K, P thẳng hàng.

Bài 13 : Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}; \vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$

*** Dạng 4: Chứng minh hai điểm trùng nhau:**

*** Phương pháp :**

Để chứng minh M và M' trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai hướng:

+ Cách 1: Chứng minh $\vec{MM}' = \vec{0}$

+ Cách 2: Chứng minh $\vec{OM} = \vec{OM}'$ với O là điểm tùy ý.

Bài 1: Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Bài 2: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. CMR hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. CMR hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J là trung điểm của AB và CD.

- a). CMR: $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{IJ}$.
- b). Gọi G là trung điểm IJ. Cm: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.
- c). Gọi P, Q là trung điểm các đoạn thẳng AC và BD, M và N là trung điểm AD và BC. CMR: Ba đoạn thẳng IJ, PQ, MN có chung trung điểm.

*** Dạng 5: Quỹ tích điểm**

*** Phương pháp:**

Đối với các bài toán quỹ tích, học sinh cần nhớ một số quỹ tích cơ bản sau:

- Nếu $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$ với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
- Nếu $|\vec{MC}| = k \cdot |\vec{AB}|$ với A, B, C cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k \cdot |\vec{AB}|$.
- Nếu $\vec{MA} = k \vec{BC}$ thì

- + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC nếu $k \in \mathbb{R}$
- + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng \overrightarrow{BC} nếu $k \in \mathbb{R}^+$
- + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng \overrightarrow{BC} nếu $k \in \mathbb{R}^-$

*** Bài tập áp dụng:**

Bài 1: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

- a). $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \frac{3}{2} |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$
- b). $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

Bài 2: Cho tam giác ABC. M là điểm tùy ý trong mặt phẳng.

- a). CMR: vectơ $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ không đổi.
- b). Tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn: $|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

§ 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Định nghĩa tọa độ của một vector, độ dài đại số của một vector trên một trục

- $\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$
- M có tọa độ là (x; y) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$
- $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

2. Tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $k\vec{a}$

- * Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$, $k \in \mathbb{R}$
- Ta có: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$; $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$; $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$
- * Hai vector \vec{a} và \vec{b} ($\vec{a} \neq \vec{0}$) cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \end{cases}$

3. + I là trung điểm của đoạn thẳng AB ta có: $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

+ G là trọng tâm của tam giác ABC ta có: $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

WWW.VNMATH.COM

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP:

*** Dạng 1: Xác định tọa độ của vector và của một điểm trên mp tọa độ Oxy:**

☛ Phương pháp giải:

Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của vector và tọa độ của một điểm trên mp tọa độ Oxy.

- * Nếu biết tọa độ hai điểm A (x_A, y_A), B (x_B, y_B) thì ta tính được tọa độ của \overrightarrow{AB} : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- * Nếu M và N có tọa độ lần lượt là a, b thì $\overrightarrow{MN} = b - a$

☛ Bài tập:

Bài 1: Trên trục (O, \vec{i}) cho hai điểm M và N có tọa độ lần lượt là -5; 3. tìm tọa độ

điểm P trên trục sao cho $\frac{PM}{PN} = \frac{1}{2}$

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD có AD=4 và chiều cao ứng với cạnh AD=3, góc BAD=60°, chọn hệ trục (A; \vec{i}, \vec{j}) sao cho \vec{i} và \overrightarrow{AD} cùng hướng. Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$.

Bài 3: Trên trục x'Ox cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -2 và 5.

- a). Tìm tọa độ của \overrightarrow{AB} .
- b). Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.
- c). Tìm tọa độ của điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- d). Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1$.

Bài 4: Trên trục x'Ox cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c.

- a). Tìm tọa độ trung điểm I của AB.
- b). Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
- c). Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC}$.

Bài 5: Trên trục x'Ox cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -3 và 1.

- a). Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 1$.
- b). Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$.

Bài 6: Trên trục x'Ox cho 4 điểm A (-2); B(4); C(1); D(6)

- a). CMR: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$
- b). Gọi I là trung điểm AB. CMR: $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA}^2$
- c). Gọi J là trung điểm CD. CMR: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD có A(-1;3); B(2;4), C(0;1). Tìm tọa độ đỉnh D.

Bài 8: Cho ΔABC , các điểm M(1;0); N(2;2) và P(-1;3) lần lượt là trung điểm của các cạnh BC; CA; AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Bài 9: Cho ΔABC , các điểm M(1;1); N(2;3) và P(0;4) lần lượt là trung điểm của các cạnh BC; CA; AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Bài 10: Cho ΔABC , các điểm $A(-5;6)$; $B(-4;-1)$ và $C(4;3)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AC. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 11: Cho 3 điểm $A(2;5)$; $B(1;1)$; $C(3;3)$.

a). Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

b). Tìm tọa độ điểm E sao cho tứ giác ABCE là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình hành đó.

Bài 12: Cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(5;-3)$, C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên Ox. Tìm tọa độ C.

* **Dạng 2: Tìm tọa độ của các vector** $\vec{u} + \vec{v}; \vec{u} - \vec{v}; k\vec{u}$

☞ **Phương pháp giải:** Tính theo công thức tọa độ $\vec{u} + \vec{v}; \vec{u} - \vec{v}; k\vec{u}$

☞ **Bài tập:**

Bài 1: Cho $\vec{a} = (2;1)$; $\vec{b} = (3;4)$; $\vec{c} = (7;2)$.

a). Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

b). Tìm tọa độ vector $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

c). Tìm hai số j; k sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

Bài 2: Cho $\vec{a} = (1;2)$; $\vec{b} = (-3;1)$; $\vec{c} = (-4;-2)$

a). Tìm tọa độ các vector $\vec{u} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{w} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$.

và xem vector nào trong các vector cùng phương với vector \vec{i} và cùng phương với \vec{j} .

b). Tìm các số m, n sao cho $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

Bài 3: Tìm x để các cặp vector sau cùng phương

a). $\vec{a} = (2;3)$ và $\vec{b} = (4;x)$.

b). $\vec{u} = (0;5)$ và $\vec{b} = (x;7)$.

c). $\vec{m} = (x;-3)$ và $\vec{n} = (-2;2x)$.

Bài 4: Biểu diễn véc tơ \vec{c} theo các véc tơ $\vec{a}; \vec{b}$ biết:

a). $\vec{a}(2;-1)$; $\vec{b}(-3;4)$; $\vec{c}(-4;7)$ b). $\vec{a}(1;1)$; $\vec{b}(2;-3)$; $\vec{c}(-1;3)$.

Bài 5: Cho bốn điểm $A(1;1)$; $B(2;-1)$; $C(4;3)$; $D(16;3)$. Hãy biểu diễn véc tơ \overrightarrow{AD} theo các véc tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

Bài 6: Biểu diễn véc tơ \vec{c} theo các véc tơ $\vec{a}; \vec{b}$ biết:

a). $\vec{a}(-4;3)$; $\vec{b}(-2;-1)$; $\vec{c}(0;5)$ b). $\vec{a}(4;2)$; $\vec{b}(5;3)$; $\vec{c}(2;0)$.

Bài 7: Cho bốn điểm $A(0;1)$; $B(2;0)$; $C(-1;2)$; $D(6;-4)$. Hãy biểu diễn véc tơ \overrightarrow{AD} theo các véc tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$

* **Dạng 3: Chứng minh 3 điểm thẳng hàng:**

☞ **Phương pháp giải:**

Sử dụng điều kiện cần và đủ sau:

* Hai vector $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

* Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

☞ **Bài tập:**

Bài 1: Cho 3 điểm $A(-1;1)$; $B(1;3)$ và $C(-2;0)$. Chứng minh rằng 3 điểm A; B; C thẳng hàng.

Bài 2: Cho 3 điểm $M(\frac{4}{3}; \frac{7}{3})$; $N(2;1)$ và $P(1;3)$. Chứng minh rằng 3 điểm M; N; P

thẳng hàng.

Bài 3: Cho 3 điểm $A(3; 4)$; $B(2; 5)$ và $C(1; 5)$. Tìm x để $(-7; x)$ thuộc đường thẳng AB.

Bài 4: Cho 3 điểm $A(-3; 4)$; $B(1; 1)$ và $C(9; -5)$.

a). Chứng minh rằng 3 điểm A; B; C thẳng hàng.

b). Tìm tọa độ điểm D sao cho A là trung điểm của BD.

c). Tìm tọa độ điểm E trên trục Ox sao cho A; B; E thẳng hàng.

Bài 5: Cho $A(2;1)$; $B(6;-1)$. Tìm tọa độ:

a). Điểm M trên trục hoành sao cho A,B,M thẳng hàng.

b). Điểm N trên trục tung sao cho A, B, N thẳng hàng.

c). Điểm P khác điểm B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 2\sqrt{5}$.

Bài 6: Cho $A(-1;-4)$; $B(3;4)$. Tìm tọa độ:

a). Điểm M trên trục hoành sao cho A,B,M thẳng hàng.

b). Điểm N trên trục tung sao cho A, B, N thẳng hàng.

c). Điểm P khác điểm B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 3\sqrt{5}$.

Bài 7: Tìm điểm P trên đường thẳng (d): $x+y=0$ sao cho tổng khoảng cách từ P tới A và B là nhỏ nhất, biết:

a). $A(1;1)$ và $B(-2;-4)$

b). $A(1;1)$ và $B(3;-2)$

* **Dạng 4: Xác định điểm thỏa mãn một đẳng thức vector, độ dài:**

☞ **Bài tập:**

Bài 1: Cho tam giác ABC với $A(1;0)$; $B(-3;-5)$; $C(0;3)$

a). Xác định tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$

b). Xác định tọa độ điểm F sao cho $AF=CF=5$

Bài 2: Cho tam giác ABC với $A(-1;3)$; $B(2;4)$; $C(0;1)$. Xác định tọa độ:

a). Trọng tâm G

b). Véc tơ trung tuyến AA_1

c). Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

d). Điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Bài 3: Cho $M(1+2t; 1+3t)$. Hãy tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

Bài 4: Cho tam giác ABC với $A(4;6)$; $B(1;4)$; $C(7; \frac{3}{2})$

a). CM: ΔABC vuông b). Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Bài 5: Cho tam giác ABC với $A(1;-2)$; $B(0;4)$; $C(3;2)$. Tìm tọa độ của:

a). Trọng tâm G của tam giác .

b). Vectơ trung tuyến ứng với cạnh BC .

c). Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

d). Tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

e). Điểm M biết: $\overline{CM} = 2\overline{AB} - 3\overline{AC}$.

f). Điểm N biết: $\overline{AN} + 2\overline{BN} - 4\overline{CN} = \vec{0}$.

Bài 6: Cho tam giác ABC với $A(0;3)$; $B(4;6)$; $C(3;3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

* **Bài Tập Tổng Hợp:**

Bài 1: Trong hệ trục Oxy , cho $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$, $C(-4;6)$

a). Tìm tọa độ $\overline{AB} + 2\overline{BC} - 3\overline{AC}$.

b). Tìm tọa độ trung điểm M của BC .

c). Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

d). Biểu diễn \overline{AG} theo $\overline{AB}, \overline{AC}$.

e). Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm I của hình bình hành này.

f). Tìm tọa độ điểm E thuộc Ox sao cho $ABCE$ là hình thang. Tìm tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình thang này.

Bài 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4;-1)$, $B(-2;-4)$, $C(-2;2)$

a). Tính chu vi tam giác ABC .

b). Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

c). Tìm tọa độ điểm I biết $\overline{AI} + 3\overline{BI} + 2\overline{CI} = \vec{0}$

Bài 3: Trong mặt phẳng Oxy cho $A(4; 3)$, $B(2; 7)$, $C(-3; 8)$.

a). Chứng minh rằng A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.

Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác.

b). Tìm D để $BCGD$ là hình bình hành. Biểu diễn \overline{AG} theo hai $\overline{AB}, \overline{AD}$.

c). Tìm tọa độ M thỏa $\overline{AM} + \overline{AG} + 2\overline{MB} + \overline{CM} = -5\overline{BC}$.

d). Tìm N thuộc cạnh BC sao cho diện tích tam giác ANB gấp 7 lần diện tích tam giác ANC .

Bài 4: Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(-1;2)$; $B(2;3)$ và $C(1; -4)$.

a). Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b). Tìm tọa độ điểm N trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.

c). Tìm tọa độ M thuộc BC thỏa $S_{\Delta AMB} = 7S_{\Delta ABC}$

d). Gọi M, P lần lượt là trung điểm của AB và BC . Phân tích \overline{AC} theo hai vectơ \overline{AP} và \overline{CM} .

Bài 5: : Cho hai điểm $A(3, 4)$; $B(2; 5)$.

a). Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua B .

b). Tìm tọa độ điểm D trên Ox sao cho 3 điểm A, B, D thẳng hàng .

c). Tìm tọa độ điểm C sao cho O là trọng tâm của tam giác ABC .

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(4; 0)$, $B(2; -4)$,

$C(0; -2)$ Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh hai tam giác ABC và tam giác MNP có cùng trọng tâm.

Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $G(1; 2)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc Ox và B thuộc Oy sao cho G là trọng tâm tam giác OAB .

Bài 8: Trong hệ trục Oxy cho các vectơ $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-1; -3)$, $\vec{c} = (3; 1)$.

a). Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{w} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

b). Biểu diễn vectơ \vec{c} theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

c). Tìm tọa độ của vectơ \vec{d} sao cho $\vec{a} + 2\vec{d} = \vec{b} - 3\vec{c}$.

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-5; 7)$, $C(3; 5)$.

a). Xác định tọa độ điểm M sao cho $\overline{AB} - 2\overline{AC} + \overline{AM} = \vec{0}$

b). Xác định tọa độ điểm P trên trục tung sao cho P thẳng hàng với A và B .

Bài 10: Trong mặt phẳng Oxy cho $A(4; 3)$, $B(2; 7)$, $C(-3; 8)$.

a). Chứng minh rằng A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác.

b). Tìm D để $BCGD$ là hình bình hành. Biểu diễn \overline{AG} theo hai $\overline{AB}, \overline{AD}$.

c). Tìm tọa độ M thỏa $\overline{AM} + \overline{AG} + 2\overline{MB} + \overline{CM} = -5\overline{BC}$.

.....Hết.....

“Trên bước đường thành công, không có dấu chân của những kẻ lười biếng”